

Optimalizácia výnosov

Keywords: analytická geometria, kvadratická rovnica, sústava rovníc, rovnica kružnice

Pri rozhodovaní o investíciách nestačí spoliehať sa na jednoduché lineárne modely – trh je totiž dynamický a plný neistôt. Zostavenie optimálneho investičného portfólia si tak vyžaduje prístup, ktorý zohľadní nielen očakávaný výnos, ale aj riziko a ďalšie obmedzenia, ako sú dostupné finančné prostriedky alebo požiadavky na diverzifikáciu. Výnosy jednotlivých aktív nie je možné vopred presne určiť – ich správanie je ovplyvnené mnohými faktormi, a preto je potrebné využiť modely založené na kvadratických funkciách. Práve tento prístup – dnes známy ako moderná teória portfólia – položil základy pre nový pohľad na investovanie. Za zásadný prínos v tejto oblasti boli v roku 1990 ocenení Nobelovou cenou Harry Markowitz, William Sharpe a Merton Miller.

Tieto problémy tak vedú na úlohy tzv. *kvadratického programovania*, čo je oblasť matematickej optimalizácie, ktorá sa zaoberá hľadaním extrémov (zvyčajne minima alebo maxima) kvadratickej funkcie na množine bodov vymedzenej lineárnymi rovnicami a nerovnicami.

Influencer túži po úspechu

Neznámy influencer by rád pomocou propagácie príspevkov a platenej reklamy zvýšil počet svojich sledujúcich na Instagrame a TikToku. Podľa dostupných informácií predpokladá, že investovaných 10 000 Kč do propagácie na Instagrame mu prinesie 1000 sledujúcich a rovnaká suma investovaná do reklamy na TikToku mu prinesie tiež 1000 sledujúcich na tejto sociálnej sieti. Vďaka výhodnej ponuke môže minúť maximálne 20 000 Kč za propagáciu na Instagrame a 10 000 Kč za reklamu na TikToku.

Úloha 1. Koľko peňazí má influencer minúť za reklamu a propagáciu na jednotlivých sociálnych sieťach, ak sa chce čo najviac priblížiť tomu, aby mal 3 000 sledujúcich na Instagrame a 2 000 sledujúcich na TikToku?

Riešenie. Označme x veľkosť investície do propagácie na Instagrame v desiatkach tisíc a podobne y veľkosť investície do reklamy na TikToku, tak optimálna hodnota celkových nákladov musí spĺňať podmienky

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{a} \quad 0 \leq y \leq 1,$$

t. j. leží v obdĺžniku. Do tej istej sústavy súradníc môžeme tiež vyznačiť aj bod, ktorý označuje cieľovú hodnotu počtu sledujúcich. Ak je x počet sledujúcich na Instagrame v tisícoch a y počet sledujúcich v tisícoch na TikToku, tak sa jedná o bod so súradnicami $[3, 2]$.

Hľadáme teda bod, ktorý leží vnútri daného obdĺžnika a má najmenšiu vzdialenosť od bodu $[3, 2]$.

Vzdialenosť ľubovoľného bodu $[x, y]$ od bodu $[3, 2]$ je daná vzťahom

$$v(x, y) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}.$$

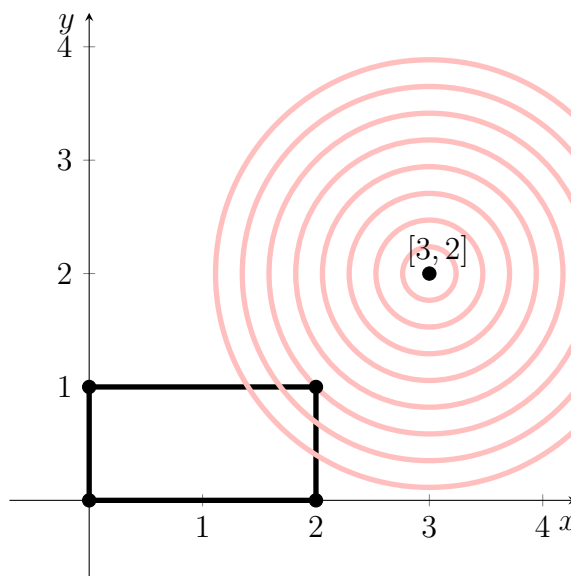
Keďže odmocnina je rastúca funkcia, tak ak $0 \leq a < b$, potom nutne platí aj $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Aby sme teda minimalizovali hodnotu $\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}$, stačí minimalizovať hodnotu $(x - 3)^2 + (y - 2)^2$.

Pre ľubovoľné $c > 0$ rovnosť

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = c$$

Results matter!

zodpovedá kružnici so stredom v bode $[3, 2]$ a polomerom $\sqrt{c}$, t. j. našou úlohou je nájsť kružnicu s najmenším možným polomerom, ktorá má neprázdny prienik s daným obdĺžnikom. Situácia je znázornená na obrázku, z ktorého môžeme riešenie uhádnuť.



Obr. 1: K riešeniu Úlohy 1

Odtiaľ vidíme, že riešením je bod $[2, 1]$. Je to však skutočne pravda? Z obrázku vidíme, že výsledná kružnica sa dotkne daného obdĺžnika v pravom hornom vrchole. To znamená, že prienik tejto kružnice s priamkou určujúcou hornú stranu obdĺžnika a prienik kružnice s priamkou určujúcou pravú stranu obdĺžnika musia byť rovnaké. Inými slovami, sústavy

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= c \\ y &= 1\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y - 2)^2 &= c \\ x &= 2\end{aligned}$$

musia mať aspoň jedno spoločné riešenie. Vyriešiť každú sústavu osobitne nemôžeme, pretože by sme dostali kvadratickú rovnicu o 2 neznámych. Avšak dosadením $x = 2$ a $y = 1$ dostaneme dvojicu rovníc

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + 1 &= c \\ 1 + (y - 2)^2 &= c,\end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že nutne

$$(x - 3)^2 + 1 = 1 + (y - 2)^2$$

alebo

$$(x - 3)^2 = (y - 2)^2,$$

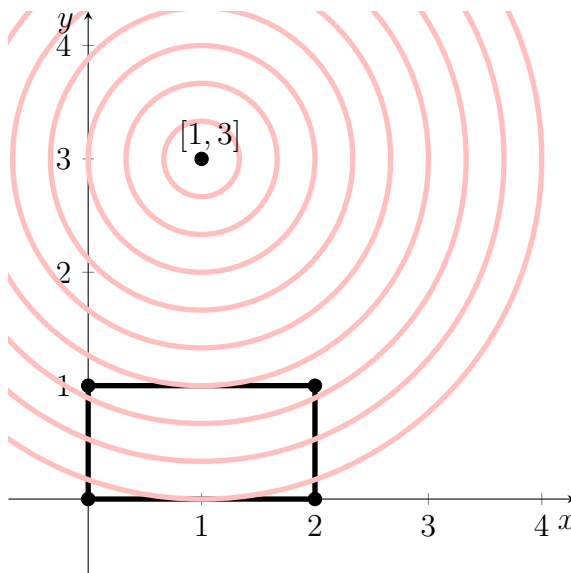
čo po odmocnení dáva

$$|x - 3| = |y - 2|.$$

Táto rovnosť je zjavne splnená pre bod $[2, 1]$. Vidíme teda, že najbližšie sa svojmu cieľu dostane, ak investuje maximálnu sumu 20 000 Kč za propagáciu na Instagrame a 10 000 Kč za reklamu na TikToku.

Úloha 2. Ako sa zmení riešenie Úlohy 1, ak je cieľová hodnota 1 000 sledujúcich na Instagrame a 3 000 na TikToku?

Riešenie. V tomto prípade minimalizujeme vzdialenosť od bodu $[1, 3]$. Situácia tak vyzerá nasledovne.



Obr. 2: K riešeniu Úlohy 2

Riešením teda bude bod ležiaci na priamke $y = 1$, čo nás privádza k sústave

$$\begin{aligned}(x - 1)^2 + (y - 3)^2 &= c \\ y &= 1.\end{aligned}$$

Jedná sa o sústavu kvadratickej a lineárnej rovnice o 3 neznámych, z ktorej ľahko urobíme kvadratickú rovnicu o 2 neznámych

$$(x - 1)^2 + 4 = c.$$

Z obrázku vidíme, že hľadaná kružnica s najmenším polomerom sa daného obdĺžnika iba dotkne, t. j. číslo c musí byť také, že kvadratická rovnica má iba 1 riešenie (ak nemá žiadne, je polomer malý a kružnica má prázdny prienik s obdĺžnikom, ak má dve rôzne riešenia, potom nutne existuje kružnica s o niečo menším polomerom, ktorá má opäť neprázdny prienik s obdĺžnikom). Riešenie kvadratickej rovnice je

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{c - 4} + 1.$$

Riešenie bude jediné (resp. obe riešenia splynú), iba pre $c = 4$. V takom prípade bude $x = 1$, t. j. riešením je bod $[1, 1]$. Tentoraz teda stačí minúť 10 000 Kč za propagáciu na Instagrame a 10 000 Kč za reklamu na TikToku.