

Round robin

Keywords: kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika, kombinatorika

Predstavte si, že usporiadáte školský turnaj v stolnom tenise, šachu, e-športe alebo napríklad futsale. Chcete, aby bol čo najspravodlivejší – aby každý hráč mal možnosť stretnúť sa so všetkými ostatnými. Práve na to slúži systém každý s každým, známy tiež ako round robin.

Jeho hlavnou výhodou je férovosť: výsledné poradie závisí len na výkonoch hráčov alebo tímov, nie na náhodnom losovaní súperov. Na druhú stranu, počet zápasov rýchlo rastie s počtom účastníkov – naplánovať taký turnaj môže byť celkom výzva. A práve tu prichádza ku slovu kombinatorika – matematika počítania možností.

Futsalový turnaj

Úloha 1. Na turnaj vo futsale sa prihlásilo 9 tímov. Je vedený systémom round robin, t. j. každý tím hrá s každým jeden zápas. Tím za každé víťazstvo v zápase dostáva 2 body, za remízu 1 bod a za prehru 0 bodov. O celkovom umiestnení tímu rozhodne záverečný súčet bodov za všetky zápasy. Koľko zápasov je nutné na turnaji odohrať? Koľkými spôsobmi je možné zostaviť rozvrh turnaja, ak je k dispozícii jediné ihrisko, na ktorom sa zápasy postupne odohrávajú?

Riešenie. Celkový počet odohraných zápasov zodpovedá počtu všetkých neusporiadaných dvojíc vytvorených z deviatich tímov. Inými slovami zodpovedá počtu všetkých dvojčlenných kombinácií bez opakovania vytvorených z deviatich prvkov. Tých je celkom

$$\binom{9}{2} = 36.$$

Pre určenie počtu spôsobov zostavenia turnaja hľadáme vlastne počet všetkých zoradení 36 zápasov, preto je všetkých možných rozvrhov turnaja celkom

$$36! = 371\,993\,326\,789\,901\,217\,467\,999\,448\,150\,835\,200\,000\,000 \doteq 3,72 \cdot 10^{41}.$$

Poznamenajme, že keby sme zhromaždili porovnateľný počet zrníek piesku, z ktorých každé bude mať objem rádovo 10^{-13} m^3 , celá kôпка by mala objem v radoch 10^{28} m^3 , čo je približne desaťnásobok objemu Slnka. Skôr než o kôпку by sa preto jednalo o relatívne hmotné vesmírne teleso.

Úloha 2. Ukážte, že ak niektorý tím v turnaji z predchádzajúcej úlohy získal celkom 13 bodov, potom nutne patrí medzi štyri najlepšie tímy turnaja.

Riešenie. Úlohu budeme riešiť sporom. Pripustíme, že by 5 tímov získalo 13 alebo viac bodov. Pretože sú v každom zápase medzi dva tímy rozdelené 2 body, je v celom turnaji rozdelených celkom $2 \cdot 36 = 72$ bodov. Pritom je medzi 5 tímov rozdelených aspoň 65 bodov, medzi zostávajúce štyri tímy tak musí byť rozdelených nanajvýš 7 zostávajúcich bodov.

Ale tieto štyri tímy navzájom medzi sebou odohrajú celkom $\binom{4}{2} = 6$ zápasov a musia si preto rozdeliť celkom 12 bodov, dokopy by sa teda muselo rozdeliť aspoň 77 bodov, čo nie je možné, dostávame teda spor.

Tím s 13 alebo viac bodmi tak môže byť najviac štyri.

Férovejšia súťaž

Na ďalší ročník futsalového turnaja z predchádzajúcich úloh sa tentoraz prihlásilo 7 tímov. Pri zostavovaní rozvrhu turnaja si však organizátor dal novú podmienku, že žiadny tím nesmie hrať v dvoch zápasoch tesne za sebou, aby hráči nemuseli hrať unavení a turnaj bol férovejší.

Libor vymyslel algoritmus, ako požadovanú postupnosť zápasov zostaviť. Vychádza z nasledujúcej tabuľky.

tým 2	D_1					
tým 3	D_2	D_1				
tým 4	D_3	D_2	D_1			
tým 5	D_4	D_3	D_2	D_1		
tým 6	D_5	D_4	D_3	D_2	D_1	
tým 7		D_5	D_4	D_3	D_2	D_1
	tým 1	tým 2	tým 3	tým 4	tým 5	tým 6

Obr. 1: Tabuľka pre tvorbu programu férového turnaja

Jej každé pole v i -tom riadku a j -tom stĺpci zodpovedá zápasu $(i + 1)$ -tého a j -tého tímu. Hľadaná postupnosť zápasov bude zodpovedať poradiu polí, ktoré Libor postupne vyberá. Pre prehľadnosť budeme tieto polia označovať podľa tímov, ktorých zápas reprezentuje, t. j. $[1; 2]$, $[3; 5]$ atď. Ďalej označíme najdlhšiu diagonálu začínajúcu polom $[1; 2]$ a končiacu polom $[6; 7]$ ako D_1 , kratšiu diagonálu začínajúcu polom $[1; 3]$ a končiacu polom $[5; 7]$ ako D_2 atď.

Liborov algoritmus vyzerá nasledovne: - ako prvé vyberieme pole v prvom stĺpci a poslednom riadku, t. j. $[1; 7]$; - ďalej vyberáme po rade pole diagonály D_1 v párnych stĺpcoch zľava doprava; - ďalej vyberáme po rade zostávajúce polia diagonály D_1 v nepárnych stĺpcoch zľava doprava; - ďalej vyberáme zľava doprava všetky polia diagonály D_2 ; - ďalej vyberáme zľava doprava všetky polia diagonály D_3 , následne D_4 atď.

Pre turnaj o siedmych tímoch tak dostaneme nasledujúce poradie zápasov

$[1; 7]$, $[2; 3]$, $[4; 5]$, $[6; 7]$, $[1; 2]$, $[3; 4]$, $[5; 6]$,
 $[1; 3]$, $[2; 4]$, $[3; 5]$, $[4; 6]$, $[5; 7]$, $[1; 4]$, $[2; 5]$,
 $[3; 6]$, $[4; 7]$, $[1; 5]$, $[2; 6]$, $[3; 7]$, $[1; 6]$, $[2; 7]$.

Úloha 3. Vypíšte využitím Liborovho algoritmu postupnosť zápasov pre turnaj, ktorého sa zúčastní 9 tímov a overte, že v nej nedôjde k výskytu rovnakého tímu v dvoch po sebe idúcich zápasoch.

Riešenie. Využitím algoritmu dostávame nasledujúcu postupnosť 36 polí a je zrejme, že každé dve po sebe idúce polia majú všetky zložky rôzne.

[1; 9], [2; 3], [4; 5], [6; 7], [8; 9], [1; 2], [3; 4], [5; 6], [7; 8], [1; 3], [2; 4], [3; 5],
[4; 6], [5; 7], [6; 8], [7; 9], [1; 4], [2; 5], [3; 6], [4; 7], [5; 8], [6; 9], [1; 5], [2; 6],
[3; 7], [4; 8], [5; 9], [1; 6], [2; 7], [3; 8], [4; 9], [1; 7], [2; 8], [3; 9], [1; 8], [2; 9].

Úloha 4. Platí Liborov algoritmus všeobecne pre ľubovoľný počet prihlásených tímov? Ak nie, tak pre ktoré? A dokážete zostaviť pre tieto prípady požadovanú postupnosť sami?

Riešenie. Označme n počet prihlásených tímov (z kontextu úlohy je pritom zrejme, že $n > 1$). Z Liborovho algoritmu odvodíme nasledujúcu postupnosť polí, ktorú rozdelíme do niekoľkých nadväzujúcich sekcií podľa ich výskytu v tabuľke (pri diagonále D_1 pritom musíme rozlišovať medzi paritou n):

[1; n],	(1. pole)
[2; 3], [4; 5], ..., [$n - 1$; n],	(1. časť diagonály D_1 , nepárne n)
[1; 2], [3; 4], ..., [$n - 2$; $n - 1$],	(2. časť diagonály D_1 , nepárne n)
[2; 3], [4; 5], ..., [$n - 2$; $n - 1$],	(1. časť diagonály D_1 , párne n)
[1; 2], [3; 4], ..., [$n - 1$; n],	(2. časť diagonály D_1 , párne n)
[1; 3], [2; 4], ..., [$n - 2$; n],	(diagonála D_2)
[1; 4], [2; 5], ..., [$n - 3$; n],	(diagonála D_3)
⋮	
[1; $i + 1$], [2; $i + 2$], ..., [$n - i$; n],	(diagonála D_i , kde $i \leq n - 2$)
[1; $i + 2$], [2; $i + 3$], ..., [$n - (i + 1)$; n],	(diagonála D_{i+1})
⋮	
[1; $n - 1$], [2; n].	(diagonála D_{n-2})

Dve po sebe idúce polia, ktoré patria do rovnakej sekcie, rovnaké číslo obsahovať nemôžu. V oboch častiach diagonály D_1 môžeme totiž ľubovoľné dve po sebe idúce polia zapísať v tvare $[j, j + 1]$ a $[j + 2, j + 3]$ a v ľubovoľnej diagonále D_i pre $i > 1$ majú zase ľubovoľné dve po sebe idúce polia tvar $[j, j + i]$ a $[j + 1, j + i + 1]$. Stačí preto overiť, za akých podmienok môže posledný člen jednej sekcie obsahovať rovnaké číslo ako prvý člen nasledujúcej sekcie. Tieto špeciálne prípady potom posúdime zvlášť.

1. pole – 1. časť diagonály D_1 . Pole [2; 3] nadväzuje nezávisle na parite n na pole [1; n]. Požadovaná podmienka rôznosti všetkých štyroch zložiek tak nie je splnená pre $n = 2$ a $n = 3$.

1. časť – 2. časť diagonály D_1 . Pre nepárne n nadväzuje pole [1; 2] na pole [$n - 1$; n], odkiaľ dostávame už spomenuté prípady $n = 2$ a $n = 3$. Pre párne n na seba nadväzujú polia [$n - 2$; $n - 1$] a [1; 2], tu musíme navyše vylúčiť prípad $n = 4$.

2. časť diagonály D_1 – diagonála D_2 . Pre nepárne n na seba nadväzujú polia [$n - 2$; $n - 1$] a [1; 3]. Podmienka rôznosti zložiek tak nie je splnená pre $n \in \{2; 3; 4; 5\}$. Ak je n párne, nadväzuje na seba pole [$n - 1$; n] a pole [1; 3]. Všetky doteraz nevylúčené čísla n skúmanej podmienke vyhovujú.

Diagonála D_i – diagonála D_{i+1} . Pole $[1; i+2]$ nadväzuje na pole $[n-i; n]$. Dostávame tak štyri možné rovnosti, pri ktorých nebude daná podmienka splnená:

$$n-i=1, \quad n-i=i+2, \quad n=1, \quad n=i+2.$$

Tretia z rovností isto platiť nemôže. Prvá rovnosť by znamenala, že $i = n-1$, ale i môže nadobúdať najvyššiu hodnotu $n-2$. Ak by platila štvrtá rovnosť, i nadobúda hodnotu práve $n-2$; diagonála D_{n-2} je však poslednou sekciou, ktorou je postupnosť ukončená, keďže žiadna ďalšia diagonála nenadväzuje. Konečne druhú rovnosť možno prepísať do tvaru $i = \frac{n-2}{2}$. Ak je n nepárne, nemôže platiť; pre ľubovoľné párne n však existuje dokonca jednoznačné i také, že platiť bude. Algoritmus preto zlyhá pre ľubovoľné párne n ; napr. pre $n=14$ je $i=6$, posledný člen diagonály D_6 je $[8; 14]$ a prvý člen diagonály D_7 je $[1; 8]$.

Liborov algoritmus tak bez výhrad funguje pre nepárne n s výnimkou 3 a 5. Dodajme však, že zrejme triviálne funguje tiež pre $n=2$ (dva tímy odohrajú jediný zápas celého turnaja). Pre zostávajúce párne n , $n=3$ a $n=5$ by sme sa teraz mali pokúsiť nájsť požadované postupnosti inak. Konštatujeme však najprv, že pre $n=3$ a $n=4$ je to nemožné, pretože

- pre $n=3$ musíme zoradiť tri polia $[1; 2]$, $[1; 3]$, $[2; 3]$, ale každé takéto zoradenie nespĺňa zadanú podmienku;
- pre $n=4$ zvolíme bez ujmy na všeobecnosti prvé pole $[1; 2]$, nasledovať nutne musí pole $[3; 4]$ a ďalej potom opäť $[1; 2]$, čo nie je možné.

Pre ostatné n už nájsť postupnosti požadovaných vlastností vieme. Pretože ich je (a algoritmov, ktorými ich môžeme nájsť) viac, uvedme aspoň niektoré príklady, ktoré dostaneme úpravou pôvodného Liborovho algoritmu. Pre $n=5$ ho modifikujeme nasledovne:

- ako prvé vyberieme pole v prvom stĺpci a poslednom riadku, t. j. $[1; 5]$;
- ďalej vyberáme po rade pole diagonály D_1 v párnych stĺpcoch zľava doprava;
- ďalej vyberáme po rade zostávajúce polia diagonály D_1 v nepárnych stĺpcoch zľava doprava;
- ďalej vyberáme sprava doľava všetky polia diagonály D_3 ;
- ďalej vyberáme sprava doľava všetky polia diagonály D_2 .

Výsledná postupnosť je tvaru

$$[1; 5], \quad [2; 3], \quad [4; 5], \quad [1; 2], \quad [3; 4], \quad [2; 5], \quad [1; 4], \quad [3; 5], \quad [2; 4], \quad [1; 3].$$

Pre párne n rôzne od 2 a 4 spočítame číslo $k = \frac{n-2}{2}$. (Práve toto číslo totiž bolo v diskusii všeobecného prípadu "problematické".) Následne aplikujeme Liborov algoritmus s tým rozdielom, že pri výbere polí zameníme poradie diagonál D_{k+1} a D_{k+2} . S ohľadom na to, že je zvyšok algoritmu rovnaký, skontrolujeme len rozdielne napojenia dotknutých sekcií.

Diagonála D_k – diagonála D_{k+2} . Na pole $[n-k; n]$ nadväzuje pole $[1; k+3]$. Dosadením za k , úpravou a porovnaním možných zhodných zložiek dostávame štyri rovnosti

$$\frac{n+2}{2} = 1, \quad \frac{n+2}{2} = \frac{n+4}{2}, \quad n=1, \quad n = \frac{n+4}{2}.$$

Druhá a tretia z rovností platiť nemôže a prvá (resp. štvrtá) rovnosť je splnená práve vtedy, keď $n=0$ (resp. $n=4$), čo tiež neplatí.

Results matter!

Diagonála D_{k+2} – diagonála D_{k+1} . Na pole $[n - (k + 2); n]$ nadväzuje pole $[1; k + 2]$. Dosadením a úpravou odvodíme opäť štyri rovnosti, ktorých platnosť by porušila zadanú podmienku:

$$\frac{n-2}{2} = 1, \quad \frac{n-2}{2} = \frac{n+2}{2}, \quad n = 1, \quad n = \frac{n+2}{2}.$$

Žiadna z uvedených rovností však platiť nemôže, pretože n nemôže byť 4, 1 ani 2.

Diagonála D_{k+1} – diagonála D_{k+3} . Na pole $[n - (k + 1); n]$ nadväzuje pole $[1; k + 4]$. Obdobne ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch môžeme odvodiť štvoricu rovností

$$\frac{n}{2} = 1, \quad \frac{n}{2} = \frac{n+6}{2}, \quad n = 1, \quad n = \frac{n+6}{2}.$$

Prvé tri z uvedených rovností platiť nemôžu už z predtým uvedených dôvodov. Štvrtá rovnosť platí pre $n = 6$; pre toto číslo však neexistuje diagonála D_{k+3} , pretože $k + 3 = \frac{6-2}{2} + 3 = 5$. (Pripomeňme, že pre $n = 6$ sú definované len diagonály D_1 – D_4 .) Algoritmus pre $n = 6$ tak končí výberom členov diagonály $D_{k+1} = D_3$.

Upravený algoritmus tak pre párne n rôzne od 2 a 4 skonštruuje požadovanú postupnosť polí. Jediné prirodzené $n > 1$, pre ktoré žiadna postupnosť zadaných vlastností neexistuje, sú preto 3 a 4.