Round robin: un sistema justo de competición

Keywords: combinatoria, probabilidad y estadística, combinatoria

Imagina que organizas un torneo escolar de tenis de mesa, ajedrez, deportes electrónicos o fútbol sala. Quieres que sea lo más justo posible, que cada jugador tenga la oportunidad de enfrentarse a todos los demás. Para eso sirve el sistema de todos contra todos, también conocido como round robin.

Su principal ventaja es la equidad: la clasificación final depende únicamente del rendimiento de los jugadores o equipos, y no del azar del sorteo de los oponentes. Por otro lado, el número de partidos aumenta rápidamente con el número de participantes, por lo que planificar un torneo de este tipo puede ser todo un reto. Y aquí es donde entra en juego la combinatoria, la matemática del cálculo de posibilidades.

Torneo de fútbol sala

Tarea 1. Se han inscrito 9 equipos en el torneo de fútbol sala. Se juega por el sistema de liguilla, es decir, cada equipo juega un partido contra cada uno de los demás. El equipo recibe 2 puntos por cada victoria en un partido, 1 punto por un empate y 0 puntos por una derrota. La clasificación general del equipo se decide por la suma final de puntos de todos los partidos.
¿Cuántos partidos hay que jugar en un torneo? ¿De cuántas maneras se puede elaborar el calendario del torneo si solo hay un campo disponible en el que se juegan los partidos sucesivamente?

Solución. El número total de partidos jugados corresponde número de todas las parejas no ordenadas formadas a partir de nueve equipos. En otras palabras, corresponde al número de todas las combinaciones de dos elementos sin repetición formadas a partir de nueve elementos. Hay un total de

$$\binom{9}{2} = 36.$$

Para determinar el número de formas de organizar el torneo, buscamos en realidad el número total de combinaciones de 36 partidos, por lo que el número total de posibles calendarios del torneo es

$$36! = 371\,993\,326\,789\,901\,217\,467\,999\,448\,150\,835\,200\,000\,000 \doteq 3{,}72 \cdot 10^{41}.$$

Cabe señalar que si reuniéramos un número comparable de granos de arena, cada uno con un volumen del orden de $10^{-13}\,\mathrm{m}^3$, el montón tendría un volumen del orden de $10^{28}\,\mathrm{m}^3$, que es aproximadamente diez veces el volumen del Sol. Por lo tanto más que un montón, se trataría de un cuerpo celeste relativamente masivo.

Tarea 2. Demuestra que si algún equipo en el torneo de la tarea anterior obtuvo un total de 13 puntos, entonces necesariamente se encuentra entre los cuatro mejores equipos del torneo.

Solución. Resolveremos el problema mediante un sistema de desempate. Supongamos que 5 equipos obtienen 13 o más puntos. Dado que en cada partido se reparten 2 puntos entre los dos equipos, en

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

todo el torneo se reparten un total de $2 \cdot 36 = 72$ puntos. Sin embargo, entre los 5 equipos se reparten al menos 65 puntos, por lo que entre los cuatro equipos restantes deben repartirse como máximo los 7 puntos restantes.

Pero estos cuatro equipos jugarán entre sí un total de $\binom{4}{2} = 6$ partidos y, por lo tanto, deben repartirse un total de 12 puntos, por lo que en total habría que repartir al menos 77 puntos, lo cual no es posible, por lo que obtenemos una contradicción.

Por lo tanto, solo puede haber un máximo de cuatro equipos con 13 o más puntos.

Una competición más justa

Para la próxima edición del torneo de fútbol sala de las tareas anteriores esta vez se inscribieron 7 equipos. Sin embargo, al elaborar el calendario del torneo, el organizador estableció una nueva condición: ningún equipo podía jugar dos partidos seguidos, para que los jugadores no tuvieran que jugar cansados y el torneo fuera más justo.

Libor ideó un algoritmo para crear la secuencia deseada de partidos. Se basa en la siguiente tabla.

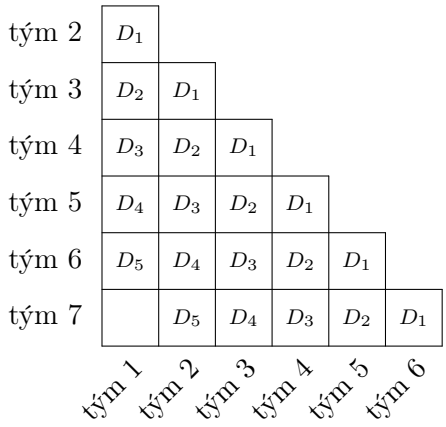

Figura 1: Tabla para crear un programa de torneo justo

Cada campo en la fila i y la columna j corresponde al partido entre el equipo $(i+1)$ y el equipo j. La secuencia de partidos buscada corresponderá al orden de los campos que Libor selecciona gradualmente. Para mayor claridad, marcaremos estos campos según los equipos cuyo partido representan, es decir, $[1;2]$, $[3;5]$, etc. A continuación, marcaremos la diagonal más larga que comienza en el campo $[1;2]$ y termina en el campo $[6;7]$ como D_1, la diagonal más corta que comienza en el campo $[1;3]$ y termina en el campo $[5;7]$ como D_2, etc.

El algoritmo de Libor es el siguiente: - primero seleccionamos los campos de la primera columna y la última fila, es decir, $[1;7]$; - a continuación, seleccionamos por orden los campos de la diagonal D_1 en las columnas pares de izquierda a derecha; - a continuación, seleccionamos por orden los campos restantes de la diagonal D_1 en las columnas impares de izquierda a derecha; - a continuación, seleccionamos de izquierda a derecha todos los campos de la diagonal D_2; - a continuación, seleccionamos de izquierda a derecha todos los campos de la diagonal D_3, y, a continuación D_4, etc.

Para el torneo de siete equipos, obtendremos el siguiente orden de partidos

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

$$[1;7],\quad [2;3],\quad [4;5],\quad [6;7],\quad [1;2],\quad [3;4],\quad [5;6],$$
$$[1;3],\quad [2;4],\quad [3;5],\quad [4;6],\quad [5;7],\quad [1;4],\quad [2;5],$$
$$[3;6],\quad [4;7],\quad [1;5],\quad [2;6],\quad [3;7],\quad [1;6],\quad [2;7].$$

Tarea 3. Utilizando el algoritmo de Libor, escribe la secuencia de partidos para un torneo en el que participan 9 equipos y compruebe que no se repita el mismo equipo en dos partidos consecutivos.

Solución. Al aplicar el algoritmo, obtenemos la siguiente secuencia de 36 campos y es evidente que cada dos campos consecutivos tienen todos los componentes diferentes.

$$[1;9],\quad [2;3],\quad [4;5],\quad [6;7],\quad [8;9],\quad [1;2],\quad [3;4],\quad [5;6],\quad [7;8],\quad [1;3],\quad [2;4],\quad [3;5],$$
$$[4;6],\quad [5;7],\quad [6;8],\quad [7;9],\quad [1;4],\quad [2;5],\quad [3;6],\quad [4;7],\quad [5;8],\quad [6;9],\quad [1;5],\quad [2;6],$$
$$[3;7],\quad [4;8],\quad [5;9],\quad [1;6],\quad [2;7],\quad [3;8],\quad [4;9],\quad [1;7],\quad [2;8],\quad [3;9],\quad [1;8],\quad [2;9].$$

Tarea 4. ¿El algoritmo de Libor se aplica en general a cualquier número de equipos inscritos? Si no es así, ¿a cuáles? ¿Y pueden elaborar ustedes mismos la secuencia requerida para estos casos?

Solución. Denotemos por n el número de equipos inscritos (del contexto de la tarea se desprende que $n > 1$). A partir del algoritmo de Libor, derivamos la siguiente secuencia de campos, que dividiremos en varias secciones consecutivas según su aparición en la tabla (en la diagonal D_1 debemos distinguir entre la paridad n):

$[1;n],$	(1. pole)
$[2;3],[4;5],\ldots,[n-1;n],$	(1. část diagonály D_1, liché n)
$[1;2],[3;4],\ldots,[n-2;n-1],$	(2. část diagonály D_1, liché n)
$[2;3],[4;5],\ldots,[n-2;n-1],$	(1. část diagonály D_1, sudé n)
$[1;2],[3;4],\ldots,[n-1;n],$	(2. část diagonály D_1, sudé n)
$[1;3],[2;4],\ldots,[n-2;n],$	(diagonála D_2)
$[1;4],[2;5],\ldots,[n-3;n],$	(diagonála D_3)
$\vdots$	
$[1;i+1],[2;i+2],\ldots,[n-i;n],$	(diagonála D_i, kde $i \leq n-2$)
$[1;i+2],[2;i+3],\ldots,[n-(i+1);n],$	(diagonála D_{i+1})
$\vdots$	
$[1;n-1],[2;n].$	(diagonála D_{n-2})

Dos campos consecutivos que pertenecen a la misma sección no pueden contener el mismo número. En ambas partes de la diagonal D_1 podemos escribir dos campos consecutivos arbitrarios en la forma $[j,j+1]$ y $[j+2,j+3]$ y en cualquier diagonal D_i para $i>1$ dos campos consecutivos arbitrarios tienen de nuevo la forma $[j,j+i]$ y $[j+1,j+i+1]$. Por lo tanto, basta con verificar en qué condiciones el último miembro de una sección puede contener el mismo número que el primer miembro de la sección siguiente. Estos casos especiales se evaluarán por separado.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

1. campo – 1. parte de la diagonal D_1. El campo $[2;3]$ se conecta independientemente de la paridad n al campo $[1;n]$. Por lo tanto, la condición requerida de que los cuatro componentes sean diferentes no se cumple para $n=2$ y $n=3$.

Parte 1 – Parte 2 de la diagonal D_1. Para los valores impares de n el campo $[1;2]$ se une al campo $[n-1;n]$, de donde obtenemos los casos ya mencionados $n=2$ y $\sim n=3$. Para los valores pares de n los campos $[n-2;n-1]$ y $[1;2]$ se unen, aquí debemos excluir además el caso $n=4$.

Parte 2 de la diagonal D_1 – diagonal D_2. Para los valores impares de n se suceden los campos $[n-2;n-1]$ y $[1;3]$. Por lo tanto, la condición de diversidad de los componentes no se cumple para $n\in\{2;3;4;5\}$. Si n es par, se suceden los campos $[n-1;n]$ y $[1;3]$. Todos los números n no excluidos hasta ahora cumplen la condición examinada.

Diagonal D_i – diagonal D_{i+1}. El campo $[1;i+2]$ se une al campo $[n-i;n]$. De este modo, obtenemos cuatro posibles igualdades en las que no se cumplirá la condición dada:

$$n-i=1, \qquad n-i=i+2, \qquad n=1, \qquad n=i+2.$$

La tercera igualdad no puede ser cierta. La primera igualdad significaría que $i=n-1$, pero i puede tomar como máximo el valor $n-2$. Si se cumpliera la cuarta igualdad, i tomaría el valor $n-2$; sin embargo, la diagonal D_{n-2} es la última sección con la que termina la sucesión, ya que no hay ninguna otra diagonal que la continúe. Por último, la segunda igualdad se puede reescribir en la forma $i=\frac{n-2}{2}$. Si n es impar, no puede ser válida; sin embargo, para cualquier n par existe incluso un i único tal que será válida. Por lo tanto, el algoritmo falla para cualquier n; par; por ejemplo, para $n=14$ es $i=6$, el último término de la diagonal D_6 es $[8;14]$ y el primer término de la diagonal D_7 es $[1;8]$.

El algoritmo de Libor funciona sin reservas para los valores impares de n con excepción de 3 y 5. Sin embargo, cabe añadir que también funciona de forma trivial para $n=2$ (dos equipos juegan un único partido en todo el torneo). Para los valores pares restantes de n, $n=3$ y $n=5$ ahora deberíamos intentar encontrar las secuencias requeridas de otra manera. Sin embargo, primero observemos que para $n=3$ y $n=4$ esto es imposible, porque

- para $n=3$ debemos ordenar tres campos $[1;2]$, $[1;3]$, $[2;3]$, pero cada una de estas ordenaciones no cumple la condición especificada;
- para $n=4$ elegiremos sin perjuicio de la generalidad el primer campo $[1;2]$, al que necesariamente debe seguir el campo $[3;4]$ y luego nuevamente $[1;2]$, lo cual no es posible.

Para los demás n ya sabemos cómo encontrar las sucesiones con las propiedades requeridas. Dado que hay más (y más algoritmos con los que podemos encontrarlas), daremos al menos algunos ejemplos que obtenemos modificando el algoritmo original
de Libor. Para $n=5$ lo modificamos de la siguiente manera:

- Primero seleccionamos los campos de la primera columna y la última fila, es decir, $[1;5]$;
- a continuación, seleccionamos sucesivamente los campos de la diagonal D_1 en las columnas pares de izquierda a derecha;
- a continuación, seleccionamos sucesivamente los campos restantes de la diagonal D_1 en las columnas impares de izquierda a derecha;
- a continuación, seleccionamos de derecha a izquierda todos los campos de la diagonal D_3;
- a continuación, seleccionamos de derecha a izquierda todos los campos de la diagonal D_2.

La secuencia resultante tiene la forma

$$[1;5], \quad [2;3], \quad [4;5], \quad [1;2], \quad [3;4], \quad [2;5], \quad [1;4], \quad [3;5], \quad [2;4], \quad [1,3].$$

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Para los números pares n distintos de 2 y 4, calculamos el número $k = \frac{n-2}{2}$. (Precisamente este número era «problemático» en la discusión del caso general) A continuación, aplicamos el algoritmo de Libor con la diferencia de que, al seleccionar los campos, intercambiamos el orden de las diagonales D_{k+1} y D_{k+2}. Teniendo en cuenta que el resto del algoritmo es el mismo, comprobemos solo las conexiones diferentes de las secciones afectadas.

Diagonal D_k – diagonal D_{k+2}. Al campo $[n-k; n]$ le sigue el campo $[1; k+3]$. Sustituyendo por k, ajustando y comparando los posibles componentes coincidentes obtenemos cuatro igualdades

$$\frac{n+2}{2} = 1, \qquad \frac{n+2}{2} = \frac{n+4}{2}, \qquad n = 1, \qquad n = \frac{n+4}{2}.$$

La segunda y tercera igualdad no pueden ser válidas y la primera (o cuarta) igualdad se cumple precisamente cuando $n = 0$ (o $n = 4$), lo que tampoco es válido.

Diagonal D_{k+2} – diagonal D_{k+1}. Al campo $[n-(k+2); n]$ le sigue el campo $[1; k+2]$. Sustituyendo y modificando, deducimos de nuevo cuatro igualdades cuya validez infringiría la condición dada:

$$\frac{n-2}{2} = 1, \qquad \frac{n-2}{2} = \frac{n+2}{2}, \qquad n = 1, \qquad n = \frac{n+2}{2}.$$

Sin embargo, ninguna de las ecuaciones anteriores puede ser válida, ya que n no puede ser 4, 1 ni 2.

Diagonal D_{k+1} – diagonal D_{k+3}. Al campo $[n-(k+1); n]$ le sigue el campo $[1; k+4]$. Al igual que en los dos casos anteriores, podemos deducir cuatro ecuaciones

$$\frac{n}{2} = 1, \qquad \frac{n}{2} = \frac{n+6}{2}, \qquad n = 1, \qquad n = \frac{n+6}{2}.$$

Las tres primeras igualdades mencionadas no pueden ser válidas por las razones expuestas anteriormente. La cuarta igualdad es válida para $n = 6$; sin embargo, para este número no existe la diagonal D_{k+3}, ya que $k + 3 = \frac{6-2}{2} + 3 = 5$. (Recordemos, que para $n = 6$ solo se definen las diagonales D_1–D_4.) El algoritmo para $n = 6$ termina así con la selección de los miembros de la diagonal $D_{k+1} = D_3$.

El algoritmo modificado construye así la secuencia de campos requerida para los valores pares de n distintos de 2 y 4. Por lo tanto, los únicos valores naturales de $n > 1$, para los que no existe ninguna secuencia con las propiedades especificadas son 3 y 4.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union