

Zdravotnícke stanovište na bežeckom preteku

Keywords: funkcie, lineárne funkcie, absolútna hodnota, optimalizácia

Predstavte si, že pomáhate organizovať veľký bežecký pretek. Na trať sa chystajú desiatky pretekárov a vašou úlohou je rozhodnúť, kam umiestniť zdravotnícke stanovište, aby bolo čo najviac nápomocné. Malo by byť blízko štartu? Alebo radšej niekde uprostred? A čo keď je kontrolných bodov na trati viac? Kde bude to správne miesto, odkiaľ to bude všade tak akurát ďaleko?

Možno to znie jednoducho, ale keď sa nad tým zamyslíte, zistíte, že nájsť najlepšie možné umiestnenie nie je zas tak jednoduché. V nasledujúcich úlohách si takúto situáciu rozoberieme. A kto vie, možno práve vďaka nám dobehnú pretekár v poriadku do cieľa.

Úloha 1. Na bežeckej trati dlhej 45 km sa nachádzajú tri kontrolné stanovištia a je potrebné na ňu umiestniť stanovište zdravotníkov. Prvé kontrolné stanovište je zriadené na 13. kilometri, druhé na 26. kilometri a tretie na 37. kilometri. Pretože má byť zdravotné stanovište čo možno najbližšie kontrolným stanovištiam, štartu i cieľu, organizátor behu ho chce zriadiť tak, aby bol súčet vzdialeností od neho k uvedeným piatim lokáciám čo najmenší.

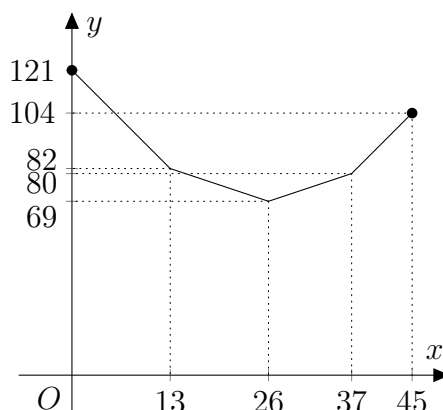
Na ktorom kilometri trate má organizátor stanovište zdravotníkov zriadiť? Je to jediná lokácia, ktorú má zvoliť? Predpokladajme, že pretek končí inde ako začal a že neexistuje kratšia cesta medzi stanovišťami než po pretekárskej trati.

Riešenie. Nech je zdravotnícke stanovište na x -tom kilometri bežeckej trate. Vzdialenosť od štartu je potom rovná x km, od prvého stanovišta $|x - 13|$ km, od druhého stanovišta $|x - 26|$ km, od tretieho stanovišta $|x - 37|$ km a od cieľa $(45 - x)$ km. Chceme teda nájsť minimálnu hodnotu funkcie

$$\begin{aligned} f(x) &= x + |x - 13| + |x - 26| + |x - 37| + (45 - x) = \\ &= |x - 13| + |x - 26| + |x - 37| + 45 \end{aligned}$$

na intervale $\langle 0; 45 \rangle$.

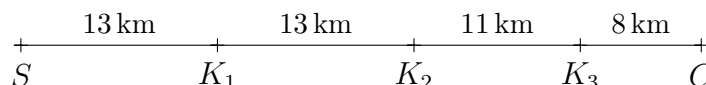
Grafom funkcie f na tomto intervale je lomená čiara zložená zo štyroch na seba nadväzujúcich úsečiek, ktoré postupne spájajú body $[0; 121]$, $[13; 82]$, $[26; 69]$, $[37; 80]$ a $[45; 104]$. Druhé súradnice spomínaných bodov získame dosadením prvých do predpisu funkcie f .



Obr. 1: Graf funkcie f

Z tohto grafu je potom zrejmé, že najmenšiu hodnotu má funkcia f práve v bode $x = 26$, t. j. priamo na druhom stanovišti. Tam (a nikde inde) by sa malo nachádzať stanovište zdravotníkov.

Poznámka. Úlohu možno riešiť aj iným spôsobom, bez funkcií a absolutných hodnôt. Znázorníme trať preteku úsečkou SC , na ktorej sú umiestnené body K_1 , K_2 a K_3 tak, aby ich poloha zodpovedala polohe prvého, druhého a tretieho kontrolného stanovišta na trati.



Obr. 2: Rozmiestnenie bodov K_1 , K_2 a K_3 na úsečke SC

Našou úlohou je na úsečku SC umiestniť bod Z tak, aby bol súčet

$$|SZ| + |K_1Z| + |K_2Z| + |K_3Z| + |CZ| \quad (*)$$

čo najmenší. Hodnotu tohoto súčtu budeme skúmať v závislosti na tom, na ktorej z úsečiek SK_1 , K_1K_3 a K_3C bod Z leží.

Ak platí $Z \in SK_1$, možno upraviť súčet $(*)$ nasledujúcim spôsobom:

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + |K_1Z| + \overbrace{|K_2Z|}^{|K_1Z|+13} + \overbrace{|K_3Z|}^{|K_1Z|+24} = 3 \cdot |K_1Z| + 82.$$

Pre $Z \in K_1K_3$ upravíme skúmaný výraz takto:

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + \overbrace{|K_1Z| + |K_3Z|}^{24} + |K_2Z| = |K_2Z| + 69.$$

A napokon pre $Z \in K_3C$ upravujeme súčet $(*)$ nasledovne:

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + \overbrace{|K_3Z|}^{|K_3Z|+24} + \overbrace{|K_2Z|}^{|K_3Z|+11} + |K_3Z| = 3 \cdot |K_3Z| + 80.$$

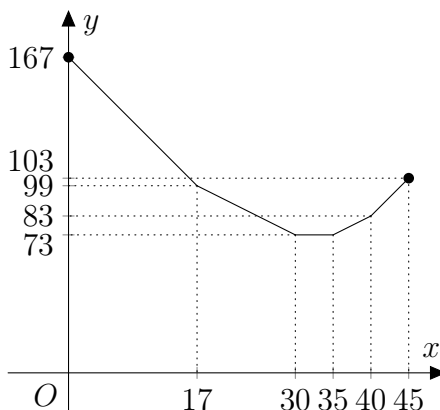
Ak porovnáme všetky tri vyjadrenia, je vidieť, že najmenšiu hodnotu bude mať súčet $(*)$ práve vtedy, keď bude $Z \in K_1K_3$ a navyše $Z = K_2$ (hodnota súčtu bude v takom prípade 69). Preto musí byť zdravotnícke stanovište v mieste 2. kontrolného stanovišta.

Úloha 2. Ako sa zmení riešenie predchádzajúcej úlohy, ak budú stanovišťa štyri, a to na 17., 30., 35. a 40. kilometri?

Riešenie. Podobne ako v riešení úlohy 1 zostavíme predpis funkcie

$$\begin{aligned} g(x) &= x + |x - 17| + |x - 30| + |x - 35| + |x - 40| + 45 - x = \\ &= |x - 17| + |x - 30| + |x - 35| + |x - 40| + 45, \end{aligned}$$

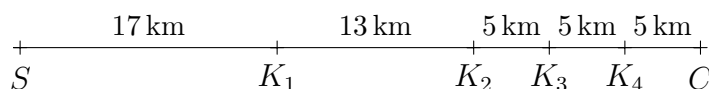
ktorej grafom je lomená čiara zložená z piatich na seba nadväzujúcich úsečiek, ktoré postupne spájajú body $[0; 167]$, $[17; 99]$, $[30; 73]$, $[35; 73]$, $[40; 83]$ a $[45; 103]$.



Obr. 3: Graf funkcie g

Z grafu je teraz vidieť, že svojej minimálnej hodnoty nadobúda funkcia g v ľubovoľnom bode intervalu $(30; 35)$. Zdravotnícke stanovište tak môže byť kdekoľvek medzi druhým a tretím kontrolným stanovišťom.

Poznámka. Aj túto úlohu môžeme riešiť podobne ako v druhom riešení predošlej úlohy. Na úsečku SC umiestnime body K_1, K_2, K_3, K_4 ako na obrázku.



Obr. 4: Rozmiestnenie bodov K_1, K_2 a K_3 na úsečke SC

Teraz budeme skúmať hodnotu súčtu $|SZ| + |K_1Z| + |K_2Z| + |K_3Z| + |K_4Z| + |CZ|$ v závislosti na tom, na ktorej z piatich častí úsečky SC bod Z leží.

Podrobne riešiť úlohu týmto spôsobom nebudeme, zmienime však aspoň prípad $Z \in K_2K_3$, pre ktorý môžeme skúmaný súčet upraviť na

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + \overbrace{|K_1Z| + |K_4Z|}^{23} + \overbrace{|K_2Z| + |K_3Z|}^5 = 73.$$

Ide tak vidieť, že pre ľubovoľný bod $Z \in K_2K_3$ má súčet rovnakú hodnotu.

Úlohu môžeme aj zovšeobecniť.

Úloha 3. Na pretekárskej trati je rozmiestnených n rôznych stanovíšť. Kde máme umiestniť zdravotné stanovisko tak, aby súčet vzdialeností zdravotného stanoviska od všetkých kontrolných stanovíšť, od štartu a od cieľa bol čo najmenší?

Riešenie. Nech sa zdravotnícke stanovisko nachádza na x -tom kilometri trate dlhej d km a kontrolné stanoviská sa nachádzajú postupne na x_1 -tom, x_2 -tom, ..., x_n -tom kilometri trate. Platí pritom iste $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < d$.

Funkcia f , ktorej minimum teraz budeme na intervale $\langle 0; d \rangle$ hľadať, má predpis tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= x + |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + (d - x) = \\ &= |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + d. \end{aligned}$$

Vyjadriť teraz túto funkciu v jednotlivých intervaloch $\langle 0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; x_2 \rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; d \rangle$ tak, aby sa v jej predpise nevyskytovali výrazy s absolútnymi hodnotami. V tabuľke sú v týchto intervaloch vyjadrené jednotlivé výrazy s absolútnymi hodnotami a v jej poslednom riadku je vyjadrená celá funkcia $f(x)$

	$\langle 0; x_1 \rangle$	$\langle x_1; x_2 \rangle$	$\langle x_2; x_3 \rangle$	...	$\langle x_{n-1}; x_n \rangle$	$\langle x_n; d \rangle$
$ x - x_1 $	$x_1 - x$	$x - x_1$	$x - x_1$	...	$x - x_1$	$x - x_1$
$ x - x_2 $	$x_2 - x$	$x_2 - x$	$x - x_2$	...	$x - x_2$	$x - x_2$
$ x - x_3 $	$x_3 - x$	$x_3 - x$	$x_3 - x$	...	$x - x_3$	$x - x_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$ x - x_{n-1} $	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	...	$x - x_{n-1}$	$x - x_{n-1}$
$ x - x_n $	$x_n - x$	$x_n - x$	$x_n - x$	...	$x_n - x$	$x - x_n$
$f(x)$	$-nx + k_0$	$-(n - 2)x + k_1$	$-(n - 4)x + k_2$	...	$(n - 2)x + k_{n-1}$	$nx + k_n$

Pre konštanty k_i v poslednom riadku platí

$$\begin{aligned} k_0 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n + d \\ k_1 &= -x_1 + x_2 + \dots + x_n + d \\ &\vdots \\ k_n &= -x_1 - x_2 - \dots - x_n + d. \end{aligned}$$

Sústredme sa teraz na smernice priamok, ktoré tvoria grafy získaných lineárnych funkcií. Všimnime si, že každá nasledujúca smernica je o 2 väčšia než predchádzajúca. Úlohu budeme riešiť osobitne pre n nepárne a n párne.

Pre nepárne n to znamená, že žiadna z týchto smerníc nie je nulová. Označíme-li $m = \frac{n+1}{2}$, v intervale $\langle x_{m-1}; x_m \rangle$ je celá funkcia f na intervale $\langle 0; x_m \rangle$ klesajúca (pretože smernice všetkých dielčích funkcií sú tu záporné) a na intervale $\langle x_m; d \rangle$ zase rastúca (pretože sú tieto smernice kladné). Odtiaľ dostávame, že v bode x_m musí byť minimum funkcie f , a preto pre nepárne n musí byť zdravotnícke stanovisko na $\frac{n+1}{2}$ -tom stanovíšti.

Pre párne n je jedna zo smerníc nulová, a to smernica grafu dielčej funkcie na intervale $\langle x_{\frac{n}{2}}; x_{\frac{n}{2}+1} \rangle$, kde $k_{\frac{n}{2}} = 0$. Na intervale $\langle 0; x_{\frac{n}{2}} \rangle$ je tak celá funkcia f klesajúca, na intervale $\langle x_{\frac{n}{2}}; x_{\frac{n}{2}+1} \rangle$ je konštantná a na intervale $\langle x_{\frac{n}{2}+1}; d \rangle$ rastúca. Preto môžeme zdravotnícke stanovisko postaviť kdekolvek medzi $x_{\frac{n}{2}}$ a $x_{\frac{n}{2}+1}$ -tým stanovíšťom.