

Stacja medyczna na zawodach biegowych

Keywords: funkcje, funkcja liniowa, wartość bezwzględna, optymalizacja

Wyobraź sobie, że pomagasz w organizacji dużego wyścigu biegowego. Dziesiątki biegaczy wkrótce wyruszą na trasę, a Twoim zadaniem jest zdecydować, gdzie umieścić punkt medyczny, aby był jak najbardziej pomocny. Czy powinien znajdować się blisko linii startu? A może gdzieś pośrodku? A co jeśli na trasie jest kilka punktów kontrolnych? Gdzie jest najlepsze miejsce, z którego wszystko jest mniej więcej w tej samej odległości?

Na początku może się to wydawać proste, ale kiedy zastanowisz się nad tym dokładniej, zdasz sobie sprawę, że znalezienie najlepszej możliwej lokalizacji wcale nie jest takie proste. W kolejnych ćwiczeniach przeanalizujemy tego typu sytuacje. I kto wie - może dzięki nam jakiś biegacz bezpiecznie dotrze do mety.

Zadanie 1. Na trasie wyścigu o długości 45km\$ znajdują się trzy punkty kontrolne, a gdzieś na trasie należy umieścić punkt medyczny. Pierwszy punkt kontrolny znajduje się na 13. kilometrze, drugi na 26. kilometrze, a trzeci na 37. kilometrze. Ponieważ stacja medyczna powinna znajdować się jak najbliżej punktów kontrolnych, startu i mety, organizator wyścigu chce umieścić ją tak, aby suma odległości od stacji medycznej do tych pięciu lokalizacji była jak najmniejsza.

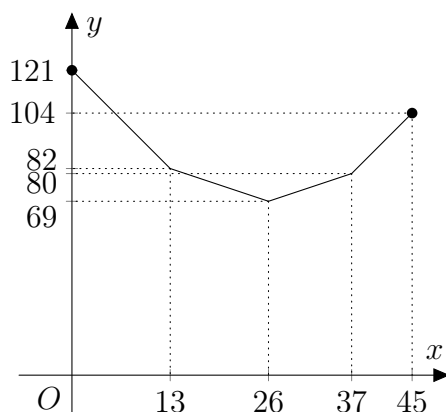
Na którym kilometrze powinna znajdować się stacja medyczna? Czy jest to jedyna możliwa lokalizacja, którą powinien wybrać organizator? Załóżmy, że wyścig kończy się w innym miejscu niż zaczyna i że nie ma krótszej drogi między punktami niż wzdłuż samej trasy wyścigu.

Rozwiązanie. Niech punkt medyczny znajduje się na x -tym kilometrze wyścigu. Wtedy odległość od startu wynosi x km, od pierwszego punktu kontrolnego wynosi $|x - 13|$ km, od drugiego punktu kontrolnego $|x - 26|$ km, od trzeciego punktu kontrolnego $|x - 37|$ km, a od mety $(45 - x)$ km. Chcemy znaleźć minimalną wartość funkcji

$$\begin{aligned} f(x) &= x + |x - 13| + |x - 26| + |x - 37| + (45 - x) = \\ &= |x - 13| + |x - 26| + |x - 37| + 45 \end{aligned}$$

w przedziale $(0; 45)$.

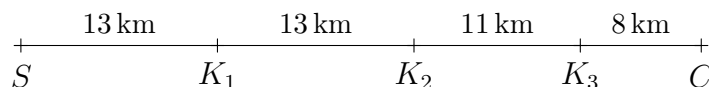
Wykresem funkcji f na tym przedziale jest fragmentaryczna krzywa liniowa złożona z czterech kolejnych odcinków łączących punkty $[0; 121]$, $[13; 82]$, $[26; 69]$, $[37; 80]$ a $[45; 104]$. Drugie współrzędne tych punktów uzyskuje się przez podstawienie pierwszej współrzędnej do funkcji f .



Rysunek 1: Wykres funkcji f

Z tego wykresu jasno wynika, że funkcja f osiąga swoją minimalną wartość przy $x = 26$, czyli dokładnie w drugim punkcie kontrolnym. Jest to jedyne miejsce, w którym powinna znajdować się stacja medyczna.

Uwaga. Ćwiczenie to można również rozwiązać bez użycia funkcji i wartości bezwzględnych. Przedstawmy trasę wyścigu jako odcinek linii SC , na którym zaznaczono punkty K_1 , K_2 i K_3 tak, aby ich pozycje odpowiadały pierwszemu, drugiemu i trzeciemu punktowi kontrolnemu na trasie.



Rysunek 2: Rozmieszczenie punktów K_1 , K_2 i K_3 na odcinku SC

Naszym zadaniem jest umieszczenie punktu Z gdzieś na odcinku SC tak, aby całkowita suma

$$|SZ| + |K_1Z| + |K_2Z| + |K_3Z| + |CZ| \quad (*)$$

jest tak mała, jak to tylko możliwe. Zbadamy wartość tej sumy w zależności od tego, czy punkt Z leży na jednym z odcinków SK_1 , K_1K_3 a K_3C czy Z .

Jeśli $Z \in SK_1$, sumę $(*)$ można uprościć w następujący sposób:

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + |K_1Z| + \overbrace{|K_2Z|}^{|K_1Z|+13} + \overbrace{|K_3Z|}^{|K_1Z|+24} = 3 \cdot |K_1Z| + 82.$$

Dla $Z \in K_1K_3$, suma staje się:

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + \overbrace{|K_1Z| + |K_3Z|}^{24} + |K_2Z| = |K_2Z| + 69.$$

Wreszcie, dla $Z \in K_3C$, możemy przepisać sumę $(*)$ jako:

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + \overbrace{|K_3Z|}^{|K_3Z|+24} + \overbrace{|K_2Z|}^{|K_3Z|+11} + |K_1Z| = 3 \cdot |K_3Z| + 80.$$

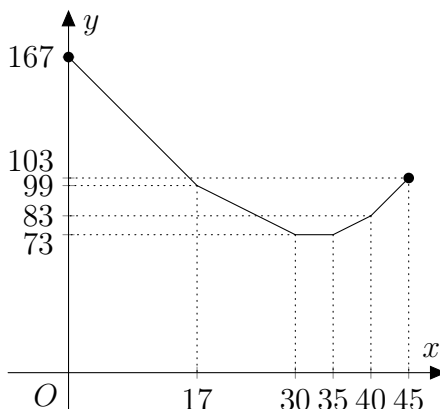
Porównując wszystkie trzy wyrażenia, widzimy, że suma $(*)$ osiąga minimum, gdy $Z \in K_1K_3$, a dokładniej, gdy $Z = K_2$ (wtedy wartość sumy wynosi 69). Dlatego stacja medyczna powinna znajdować się w drugim punkcie kontrolnym.

Zadanie 2. Jak zmienia się rozwiązanie poprzedniego zadania, jeśli istnieją cztery punkty kontrolne zlokalizowane na 17, 30, 35 i 40 kilometrze?

Rozwiązanie. Podobnie jak w rozwiązaniu ćwiczenia 1, definiujemy funkcję

$$\begin{aligned} g(x) &= x + |x - 17| + |x - 30| + |x - 35| + |x - 40| + 45 - x = \\ &= |x - 17| + |x - 30| + |x - 35| + |x - 40| + 45, \end{aligned}$$

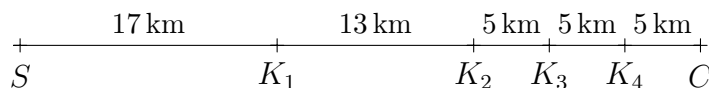
której wykresem jest krzywa liniowa złożona z pięciu połączonych odcinków, łączących kolejno punkty $[0; 167]$, $[17; 99]$, $[30; 73]$, $[35; 73]$, $[40; 83]$ i $[45; 103]$.



Rysunek 3: Wykres funkcji g

Z wykresu widać, że funkcja g osiąga wartość minimalną w dowolnym punkcie przedziału $\langle 30; 35 \rangle$. Dlatego stacja medyczna może znajdować się w dowolnym miejscu między drugim a trzecim punktem kontrolnym.

Uwaga. Problem ten można również rozwiązać w podobny sposób, jak w przypadku drugiego rozwiązania poprzedniego ćwiczenia. Umieszczamy punkty K_1 , K_2 , K_3 i K_4 wzdłuż odcinka SC , jak pokazano na poniższym rysunku.



Rysunek 4: Rozmieszczenie punktów K_1 , K_2 i K_3 na odcinku SC

Rozważmy teraz wartość sumy $|SZ| + |K_1Z| + |K_2Z| + |K_3Z| + |K_4Z| + |CZ|$ w zależności od tego, na której z pięciu części odcinka SC leży punkt Z .

Nie rozwiążemy całego problemu przy użyciu tej metody, ale rozważymy przynajmniej przypadek, w którym $Z \in K_2K_3$. W tym przypadku suma całkowita wynosi

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + \overbrace{|K_1Z| + |K_4Z|}^{23} + \overbrace{|K_2Z| + |K_3Z|}^5 = 73.$$

Jak widać, dla dowolnego punktu $Z \in K_2K_3$ suma całkowita pozostaje taka sama.

Problem ten można również uogólnić.

Zadanie 3. Na trasie wyścigu znajduje się n różnych punktów kontrolnych. Gdzie powinien znajdować się punkt medyczny, aby suma jego odległości od wszystkich punktów kontrolnych, startu i mety była jak najmniejsza?

Rozwiązanie. Niech punkt medyczny znajduje się na x -tym kilometrze trasy o długości d km, a punkty kontrolne na x_1 -tym, x_2 -tym, ..., x_n -tym kilometrze trasy. Zakładamy, że $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < d$.

Funkcja f , której minimum szukamy teraz w przedziale $(0; d)$, jest określona przez

$$\begin{aligned} f(x) &= x + |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + (d - x) = \\ &= |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + d. \end{aligned}$$

Teraz wyrazimy tę funkcję na poszczególnych przedziałach $\langle 0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; x_2 \rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; d \rangle$ tak, aby wyrażenia z wartościami bezwzględnymi nie pojawiały się już w definicji funkcji. W poniższej tabeli każdy termin z wartością bezwzględną został przepisany dla odpowiednich przedziałów, a ostatni wiersz przedstawia pełne wyrażenie funkcji $f(x)$.

	$\langle 0; x_1 \rangle$	$\langle x_1; x_2 \rangle$	$\langle x_2; x_3 \rangle$	...	$\langle x_{n-1}; x_n \rangle$	$\langle x_n; d \rangle$
$ x - x_1 $	$x_1 - x$	$x - x_1$	$x - x_1$	...	$x - x_1$	$x - x_1$
$ x - x_2 $	$x_2 - x$	$x_2 - x$	$x - x_2$	...	$x - x_2$	$x - x_2$
$ x - x_3 $	$x_3 - x$	$x_3 - x$	$x_3 - x$	...	$x - x_3$	$x - x_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$ x - x_{n-1} $	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	...	$x - x_{n-1}$	$x - x_{n-1}$
$ x - x_n $	$x_n - x$	$x_n - x$	$x_n - x$	...	$x_n - x$	$x - x_n$
$f(x)$	$-nx + k_0$	$-(n - 2)x + k_1$	$-(n - 4)x + k_2$	...	$(n - 2)x + k_{n-1}$	$nx + k_n$

Dla stałych k_i w ostatnim wierszu mamy:

$$\begin{aligned} k_0 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n + d \\ k_1 &= -x_1 + x_2 + \dots + x_n + d \\ &\vdots \\ k_n &= -x_1 - x_2 - \dots - x_n + d. \end{aligned}$$

Skupmy się teraz na nachyleniach odcinków linii tworzących wykres funkcji liniowej fragmentarycznej $f(x)$. Zauważmy, że każde nachylenie wzrasta o 2 w stosunku do poprzedniego. Teraz rozwiążemy ćwiczenie oddzielnie dla nieparzystych i parzystych wartości n .

Dla nieparzystych wartości n , żadne z nachyleń odcinków liniowych nie jest równe zero. Oznaczmy $m = \frac{n+1}{2}$. Na przedziale $\langle x_{m-1}; x_m \rangle$ nachylenie wykresu funkcji wynosi -1 , a na następującym przedziale $\langle x_m; x_{m+1} \rangle$, nachylenie wynosi 1 . Oznaczając więc, eaaafunkcja f jest malejąca na przedziale $\langle 0; x_m \rangle$ (ponieważ wszystkie nachylenia segmentów są tam ujemne) i rosnąca na przedziale $\langle x_m; d \rangle$ (ponieważ wszystkie nachylenia w tej części są dodatnie). Wynika z tego, że funkcja f osiąga swoje minimum w punkcie x_m , a zatem, dla nieparzystych n , stacja medyczna musi być umieszczona w $\frac{n+1}{2}$ -tym punkcie kontrolnym.

Dla parzystych wartości n , jedno z nachyleń jest równe zero - konkretnie, nachylenie fragmentu wykresu na przedziale $\langle x_{\frac{n}{2}}; x_{\frac{n}{2}+1} \rangle$, gdzie $p = \frac{n}{2}$. Na przedziale $\langle 0; x_p \rangle$ funkcja f jest malejąca; na przedziale $\langle x_p; x_{p+1} \rangle$ jest stała; i na przedziale $\langle x_{p+1}; d \rangle$ jest rosnąca. Zatem funkcja f osiąga wartość minimalną w każdym punkcie przedziału $\langle x_{\frac{n}{2}}; x_{\frac{n}{2}+1} \rangle$. Tak więc, dla n parzystych, stacja medyczna może być umieszczona w dowolnym miejscu pomiędzy $\frac{n}{2}$ -tym i $(\frac{n}{2} + 1)$ -tym punktem kontrolnym.