

Zdravotnické stanoviště na běžeckém závodě

Keywords: funkce, lineární funkce, absolutní hodnota, optimalizace

Představte si, že pomáháte organizovat velký běžecký závod. Na trať se chystají desítky závodníků a vaším úkolem je rozhodnout, kam umístit zdravotnické stanoviště, aby bylo co nejvíce nápomocné. Mělo by být blízko startu? Nebo raději někde uprostřed? A co když je kontrolních bodů na trati víc? Kde bude to správné místo, odkud to bude všude tak akorát daleko?

Možná to zní jednoduše, ale když se nad tím zamyslíte, tak zjistíte, že najít nejlepší možné umístění není zas tak snadné. V následujících úlohách si takovou situaci rozebereme. A kdo ví, třeba právě díky nám doběhne závodník v pořádku do cíle.

Úloha 1. Na běžecké trase dlouhé 45 km se nachází tři kontrolní stanoviště a je třeba na ni umístit stanoviště zdravotníků. První kontrolní stanoviště je zřízeno na 13. kilometru, druhé na 26. kilometru a třetí na 37. kilometru. Protože má být zdravotní stanoviště co možná nejbližší kontrolním stanovištím, startu i cíli, organizátor běhu jej chce zřídit tak, aby byl součet vzdáleností od něj k uvedeným pěti lokacím co nejmenší.

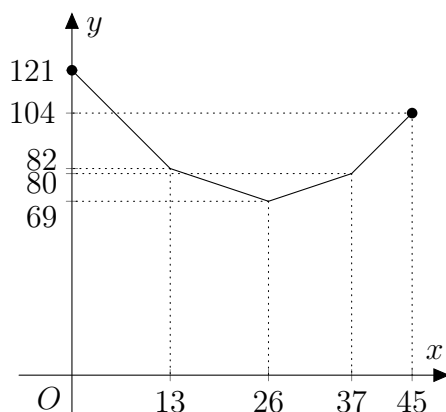
Na kterém kilometru trasy má organizátor stanoviště zdravotníků zřídit? Je to jediná lokace, kterou má zvolit? Předpokládejme, že závod končí jinde než začal a že neexistuje kratší cesta mezi stanovišti než po závodní trase.

Řešení. Nechť je zdravotnické stanoviště na x -tém kilometru běžecké trasy. Vzdálenost od startu je potom rovna x km, od prvního stanoviště $|x - 13|$ km, od druhého stanoviště $|x - 26|$ km, od třetího stanoviště $|x - 37|$ km a od cíle $(45 - x)$ km. Chceme tedy najít minimální hodnotu funkce

$$\begin{aligned} f(x) &= x + |x - 13| + |x - 26| + |x - 37| + (45 - x) = \\ &= |x - 13| + |x - 26| + |x - 37| + 45 \end{aligned}$$

na intervalu $\langle 0; 45 \rangle$.

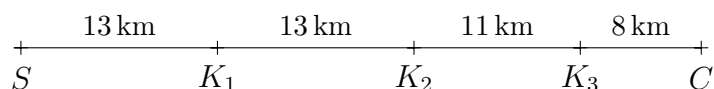
Grafem funkce f na tomto intervalu je lomená čára složená ze čtyř na sebe navazujících úseček, které postupně spojují body $[0; 121]$, $[13; 82]$, $[26; 69]$, $[37; 80]$ a $[45; 104]$. Druhé souřadnice zmíněných bodů získáme dosazením prvních do předpisu funkce f .



Obrázek 1: Graf funkce f

Z tohoto grafu je pak zřejmé, že nejmenší hodnotu má funkce f právě v bodě $x = 26$, tj. přímo na druhém stanovišti. Tam (a nikde jinde) by se mělo nacházet stanoviště zdravotníků.

Poznámka. Úlohu lze řešit i jiným způsobem, bez funkcí a absolutních hodnot. Znázorníme trasu závodu úsečkou SC , na které jsou umístěny body K_1 , K_2 a K_3 tak, aby jejich poloha odpovídala poloze prvního, druhého a třetího kontrolního stanoviště na trase.



Obrázek 2: Rozmístění bodů K_1 , K_2 a K_3 na úsečce SC

Naším úkolem je na úsečce SC umístit bod Z tak, aby byl součet

$$|SZ| + |K_1Z| + |K_2Z| + |K_3Z| + |CZ| \quad (*)$$

co nejmenší. Hodnotu tohoto součtu budeme zkoumat v závislosti na tom, na které z úseček SK_1 , K_1K_3 a K_3C bod Z leží.

Jestliže platí $Z \in SK_1$, lze upravit součet $(*)$ následujícím způsobem:

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + |K_1Z| + \overbrace{|K_2Z|}^{|K_1Z|+13} + \overbrace{|K_3Z|}^{|K_1Z|+24} = 3 \cdot |K_1Z| + 82.$$

Pro $Z \in K_1K_3$ upravíme zkoumaný výraz takto:

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + \overbrace{|K_1Z| + |K_3Z|}^{24} + |K_2Z| = |K_2Z| + 69.$$

A konečně pro $Z \in K_3C$ upravujeme součet $(*)$ následovně:

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + \overbrace{|K_3Z|}^{|K_3Z|+24} + \overbrace{|K_2Z|}^{|K_3Z|+11} + |K_3Z| = 3 \cdot |K_3Z| + 80.$$

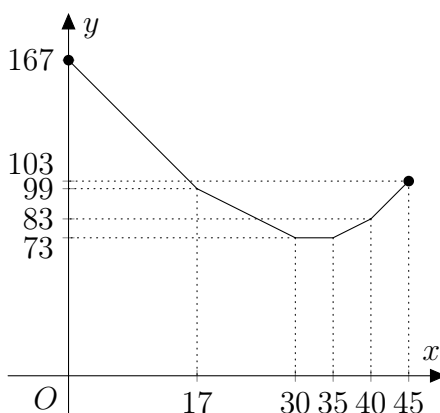
Porovnáme-li všechna tři vyjádření, je vidět, že nejmenší hodnotu bude mít součet $(*)$ právě tehdy, bude-li $Z \in K_1K_3$ a navíc $Z = K_2$ (hodnota součtu bude v takovém případě 69). Proto musí být zdravotnické stanoviště v místě 2. kontrolního stanoviště.

Úloha 2. Jak se řešení předchozí úlohy změní, jestliže budou stanoviště čtyři, a to na 17., 30., 35. a 40. kilometru?

Řešení. Podobně jako v řešení úlohy 1 sestavíme předpis funkce

$$\begin{aligned} g(x) &= x + |x - 17| + |x - 30| + |x - 35| + |x - 40| + 45 - x = \\ &= |x - 17| + |x - 30| + |x - 35| + |x - 40| + 45, \end{aligned}$$

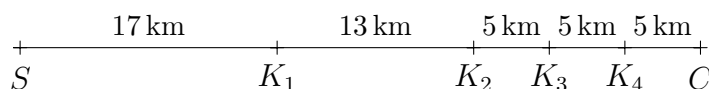
jejímž grafem je lomená čára složená z pěti na sebe navazujících úseček, které postupně spojují body $[0; 167]$, $[17; 99]$, $[30; 73]$, $[35; 73]$, $[40; 83]$ a $[45; 103]$.



Obrázek 3: Graf funkce g

Z grafu je nyní vidět, že své minimální hodnoty nabývá funkce g v libovolném bodě intervalu $\langle 30; 35 \rangle$. Zdravotnické stanoviště tak může být kdekoliv mezi druhým a třetím kontrolním stanovištěm.

Poznámka. I tuto úlohu můžeme řešit podobně jako ve druhém řešení předešlé úlohy. Na úsečku SC umístíme body K_1 , K_2 , K_3 , K_4 jako na obrázku.



Obrázek 4: Rozmístění bodů K_1 , K_2 a K_3 na úsečce SC

Nyní budeme zkoumat hodnotu součtu $|SZ| + |K_1Z| + |K_2Z| + |K_3Z| + |K_4Z| + |CZ|$ v závislosti na tom, na které z pěti částí úsečky SC bod Z leží.

Podrobně řešit úlohu tímto způsobem nebudeme, zmíníme však alespoň případ $Z \in K_2K_3$, pro který můžeme zkoumaný součet upravit na

$$\overbrace{|SZ| + |CZ|}^{45} + \overbrace{|K_1Z| + |K_4Z|}^{23} + \overbrace{|K_2Z| + |K_3Z|}^5 = 73.$$

Jde tak vidět, že pro libovolný bod $Z \in K_2K_3$ má součet stejnou hodnotu.

Úlohu můžeme i zobecnit.

Úloha 3. Na závodní trati je rozmístěno n různých stanovišť. Kde máme umístit zdravotní stanoviště tak, aby součet vzdáleností zdravotního stanoviště od všech kontrolních stanovišť, od startu a od cíle byl co nejmenší?

Řešení. Nechť se zdravotnické stanoviště nachází na x -tém kilometru trasy dlouhé d km a kontrolní stanoviště se nachází postupně na x_1 -tém, x_2 -tém, ..., x_n -tém kilometru trasy. Platí přitom jistě $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < d$.

Funkce f , jejíž minimum nyní budeme na intervalu $\langle 0; d \rangle$ hledat, má předpis tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= x + |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + (d - x) = \\ &= |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + d. \end{aligned}$$

Vyjádříme nyní tuto funkci v jednotlivých intervalech $\langle 0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; x_2 \rangle$, ..., $\langle x_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; d \rangle$ tak, aby se v jejím předpisu nevyskytovaly výrazy s absolutními hodnotami. V tabulce jsou v těchto intervalech vyjádřeny jednotlivé výrazy s absolutními hodnotách a v jejím posledním řádku je vyjádřena celá funkce $f(x)$

	$\langle 0; x_1 \rangle$	$\langle x_1; x_2 \rangle$	$\langle x_2; x_3 \rangle$	...	$\langle x_{n-1}; x_n \rangle$	$\langle x_n; d \rangle$
$ x - x_1 $	$x_1 - x$	$x - x_1$	$x - x_1$	...	$x - x_1$	$x - x_1$
$ x - x_2 $	$x_2 - x$	$x_2 - x$	$x - x_2$	...	$x - x_2$	$x - x_2$
$ x - x_3 $	$x_3 - x$	$x_3 - x$	$x_3 - x$	...	$x - x_3$	$x - x_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$ x - x_{n-1} $	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	...	$x - x_{n-1}$	$x - x_{n-1}$
$ x - x_n $	$x_n - x$	$x_n - x$	$x_n - x$	...	$x_n - x$	$x - x_n$
$f(x)$	$-nx + k_0$	$-(n - 2)x + k_1$	$-(n - 4)x + k_2$	...	$(n - 2)x + k_{n-1}$	$nx + k_n$

Pro konstanty k_i v posledním řádku platí

$$\begin{aligned} k_0 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n + d \\ k_1 &= -x_1 + x_2 + \dots + x_n + d \\ &\vdots \\ k_n &= -x_1 - x_2 - \dots - x_n + d. \end{aligned}$$

Soustředíme se nyní na směrnice přímk, které tvoří grafy získaných lineárních funkcí. Všimněme si, že každá následující směrnice je o 2 větší než předchozí. Úlohu budeme řešit zvlášť pro n liché a n sudé.

Pro liché n to znamená, že žádná z těchto směrnic není nulová. Označíme-li $m = \frac{n+1}{2}$, v intervalu $\langle x_{m-1}; x_m \rangle$ je celá funkce f klesající (protože směrnice všech dílčích funkcí jsou tu záporné) a na intervalu $\langle x_m; d \rangle$ zase rostoucí (protože jsou tyto směrnice kladné). Odtud dostáváme, že v bodě x_m musí být minimum funkce f , a proto pro liché n musí být zdravotnické stanoviště na $\frac{n+1}{2}$ -tém stanovišti.

Pro sudé n je jedna ze směrnic nulová, a to směrnice grafu dílčí funkce na intervalu $\langle x_{\frac{n}{2}-1}; x_{\frac{n}{2}} \rangle$, kde $p = \frac{n}{2}$. Na intervalu $\langle 0; x_p \rangle$ je tak celá funkce f klesající, na intervalu $\langle x_{p-1}; x_p \rangle$ je konstantní a na intervalu $\langle x_p; d \rangle$ je rostoucí. Prosudn proto můžeme zdravotnické stanoviště postavit kdekoli mezi x_{p-1} a x_p -tým stanovištěm.