

Matematika ukrytá v liste papiera

Keywords: postupnosti a rady, pomer, geometrická postupnosť, aritmetická postupnosť

Formáty papiera

Medzinárodný štandard formátov papiera je daný normou ISO 216 a zahŕňa dve základné rady. Rada A obsahuje formáty A0-A10 a rada B formáty B0-B10. Táto norma je založená na pôvodnej norme DIN 476, ktorá sa používala už od roku 1922 v Nemecku. Vytvoril ju nemecký matematik a fyzik Walter Porstmann.

Obe rady majú dve spoločné základné vlastnosti:

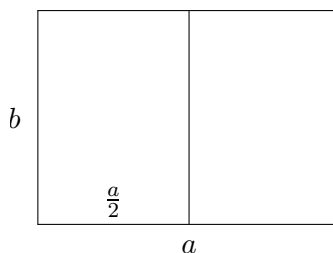
1. Všetky formáty sú navzájom podobné pravouholníky.
2. Menší formát vzniká z väčšieho rozpolením, t. j. rozdelením na dva navzájom osovo súmerné pravouholníky.¹

Tieto vlastnosti nie sú náhodne zvolené. Majú jednak estetický význam a jednak svoje praktické využitie. Napríklad každý list papiera v danom systéme sa dá vyrobiť z najväčšieho kusu prostým rezaním a nevzniká žiadny odpad.

Rady A aj B ďalej majú každá istú špeciálnu vlastnosť navyše:

- U rady A navyše platí, že obsah najväčšieho papiera A0 je 1 m^2 .
- U najväčšieho formátu B0 rady B potom platí, že jeho kratšia strana má dĺžku 1 m.

Úloha 1. Určte koeficient podobnosti (zmenšenia) dvoch po sebe nasledujúcich formátov papiera a určte tiež pomer susedných strán, ktoré musí každý z formátov dodržať.



Obr. 1: Označenie pre Úlohu 1

Úloha 2. Vypočítajte rozmery najväčšieho formátu A0, ak viete, že majú jeho dĺžky strán celočíselné veľkosti v mm a jeho obsah je čo možno najbližšie jednému štvorcovému metru.

¹Dĺžky strán formátov, ktoré vznikli rozpolením, sú zaokrúhlené na celé milimetre nadol. Najčastejšie používaný formát A4 má rozmery $210 \times 297 \text{ mm}$.

Úloha 3. Rada formátov B má okrem spoločných vlastností platných pre obe rady A aj B tiež tú vlastnosť, že dĺžka kratšej strany najväčšieho formátu B0 je rovná jednému metru. Ukážte, že ak formát A0 bude mať obsah presne jeden meter štvorcový a ak pripustíme u všetkých formátov neceločíselné rozmery, platí pre každé nezáporné celé číslo n vzťah

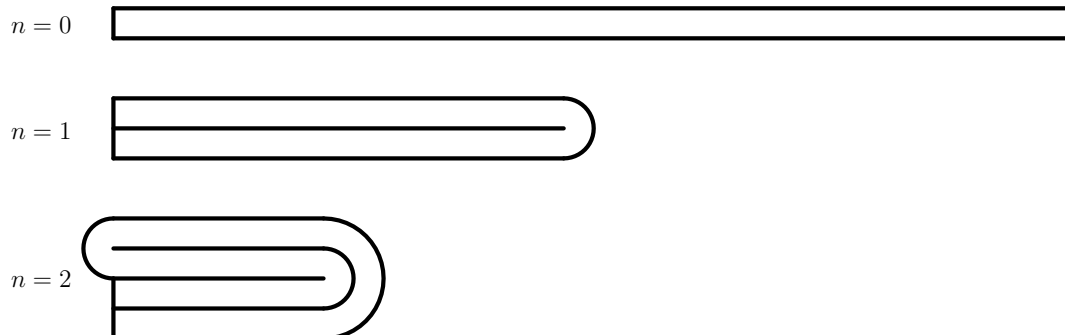
$$S(B(n+1)) = \sqrt{S(A(n)) \cdot S(A(n+1))},$$

t. j. obsah formátu $B(n+1)$ je geometrickým priemerom obsahov formátov $A(n)$ a $A(n+1)$.

Skladanie papiera

Možno vás už niekedy napadla otázka, koľkokrát je možné preložiť papier formátu A4 napoly a možno ste si to aj sami vyskúšali. Pravdepodobne vás ale ani nenapadlo, že odpoveď na túto otázku môže dať matematik, ani papier nemusí vôbec prekladať.

Predstavme si nasledujúci jednoduchý model prekladania papiera.



Obr. 2: Model preloženia papiera

Pri preložení papiera napolovicu sa nám vždy časť papiera spotrebuje na vytvorenie skladu. Jeho tvar si môžeme modelovať ako polovicu kružnice, ktorej polomer je rovný hrúbke papiera. Navyše si tiež môžeme všimnúť, že papier sa pri prekladaní vrství. Na začiatku máme len jednu vrstvu, po prvom preložení dve vrstvy, po druhom preložení štyri vrstvy atď. V ďalších úlohách budeme pracovať s týmto modelom.

Úloha 4. Aká by bola hrúbka navrstveného kancelárskeho papiera po štyroch, siedmich, desiatich, dvadsiatich jeden a štyridsiatich dvoch preloženiach? Predpokladajme, že hrúbka nášho listu papiera je $t_0 = 0,1$ mm.

Podľa výsledkov predchádzajúcej úlohy je vidieť, že pre prekladanie papiera musí existovať nejaký limit. Jednou z možností, ako tento limit poznať, je skúmanie koľko papiera sa nám pri prekladaní vlastne stráca pri vytváraní skladu.

Úloha 5. Aké množstvo papiera sa “stratí” pri jeho skladaní?

Úloha 6. Koľkokrát je možné preložiť typický kancelársky papier formátu A4 o hrúbke 0,1 mm?

Pre zaujímavosť dodajme, že ako prvá rovnicu z Úlohy 5 odvodila stredoškolská študentka Britney Gallivan z Kalifornie, ktorá je momentálne držiteľkou svetového rekordu v Guinnessovej knihe rekordov za najväčší počet preložení papiera napoly. Celkom preložila papier dvanásťkrát. Na to však nemohla použiť normálny papier formátu A4, ale použila toaletný papier dĺžky 1 219 metrov. Navyše použila inú techniku skladania (striedala smery).

Literatúra

1. Niss, Mogens; Bluem Werner. *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*, Routledge 2020, 978-1-315-18931-4
2. *Most times to fold a piece of paper*. <https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/494571-most-times-to-fold-a-piece-of-paper>
3. *Wikipedia. Paper size*. https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_size