

Matematika ukrytá v liste papiera

Keywords: postupnosti a rady, pomer, geometrická postupnosť, aritmetická postupnosť

Formáty papiera

Medzinárodný štandard formátov papiera je daný normou ISO 216 a zahŕňa dve základné rady. Rada A obsahuje formáty A0-A10 a rada B formáty B0-B10. Táto norma je založená na pôvodnej norme DIN 476, ktorá sa používala už od roku 1922 v Nemecku. Vytvoril ju nemecký matematik a fyzik Walter Porstmann.

Obe rady majú dve spoločné základné vlastnosti:

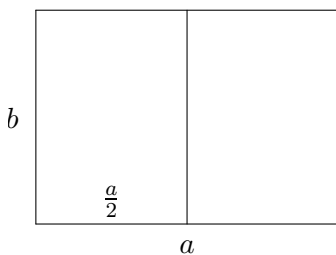
1. Všetky formáty sú navzájom podobné pravouholníky.
2. Menší formát vzniká z väčšieho rozpolením, t. j. rozdelením na dva navzájom osovo súmerné pravouholníky.¹

Tieto vlastnosti nie sú náhodne zvolené. Majú jednak estetický význam a jednak svoje praktické využitie. Napríklad každý list papiera v danom systéme sa dá vyrobiť z najväčšieho kusu prostým rezaním a nevzniká žiadny odpad.

Rady A aj B ďalej majú každá istú špeciálnu vlastnosť navyše:

- U rady A navyše platí, že obsah najväčšieho papiera A0 je 1 m^2 .
- U najväčšieho formátu B0 rady B potom platí, že jeho kratšia strana má dĺžku 1 m.

Úloha 1. Určte koeficient podobnosti (zmenšenia) dvoch po sebe nasledujúcich formátov papiera a určte tiež pomer susedných strán, ktoré musí každý z formátov dodržať.



Obr. 1: Označenie pre Úlohu 1

Riešenie. Najprv si uvedomme, že pravouholníkom je obdĺžnik (pretože žiadnym rozpolením štvorca nemôže vzniknúť štvorec). Rozpolenie dotyčného obdĺžnika vykonávame pozdĺž osi dlhšej strany tohto

¹Dĺžky strán formátov, ktoré vznikli rozpolením, sú zaokrúhlené na celé milimetre nadol. Najčastejšie používaný formát A4 má rozmery $210 \times 297 \text{ mm}$.

Results matter!

obdĺžnika. Ak by sme polenie vykonali pozdĺž osi kratšej strany, nedostali by sme obdĺžnik podobný s pôvodným – dlhšia strana sa nezmení a kratšia sa skráti.

Ak označíme a dlhšiu stranu obdĺžnika, b jeho kratšiu stranu a k koeficient zmenšenia dvoch po sebe idúcich formátov, platí $k \cdot a = b$ a $k \cdot b = \frac{a}{2}$. Dosadením prvého vzťahu za b v druhom vzťahu dostávame

$$k^2 \cdot a = \frac{a}{2} \quad / : a$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zo vzťahu $k \cdot a = b$ ďalej plynie, že pomer strán obdĺžnika $a : b$ je prevrátenou hodnotou koeficientu k , t. j. $\sqrt{2}$.

Úloha 2. Vypočítajte rozmery najväčšieho formátu A0, ak viete, že majú jeho dĺžky strán celočíselné veľkosti v mm a jeho obsah je čo možno najbližšie jednému štvorcovému metru.

Riešenie. Z predchádzajúcej úlohy vieme, že rozmery listu formátu A0 sú b_0 (kratšia strana) a $b_0 \cdot \sqrt{2}$ (dlhšia strana) pre neznámu dĺžku b_0 , ktorú je potrebné vypočítať. Vieme, že

$$b_0 \cdot b_0 \cdot \sqrt{2} = 1000000 \text{ mm}^2,$$

a teda po vyjadrení b_0 a zaokrúhlení výsledku na jednotky dostávame hodnotu $b_0 \doteq 841 \text{ mm}$. Dĺžka dlhšej strany formátu A0 je potom súčinom $841 \cdot \sqrt{2} \doteq 1189 \text{ mm}$.

Úloha 3. Rada formátov B má okrem spoločných vlastností platných pre obe rady A aj B tiež tú vlastnosť, že dĺžka kratšej strany najväčšieho formátu B0 je rovná jednému metru. Ukážte, že ak formát A0 bude mať obsah presne jeden meter štvorcový a ak pripustíme u všetkých formátov neceločíselné rozmery, platí pre každé nezáporné celé číslo n vzťah

$$S(B(n+1)) = \sqrt{S(A(n)) \cdot S(A(n+1))},$$

t. j. obsah formátu $B(n+1)$ je geometrickým priemerom obsahov formátov $A(n)$ a $A(n+1)$.

Riešenie. Pretože kratšia strana formátu B0 meria 1 m, meria jeho dlhšia strana podľa riešenia Úlohy 1 (platného aj pre formát B, pretože vychádzame z rovnakých vlastností) $\sqrt{2}$ m. Teda obsah formátu B0 je $\sqrt{2} \text{ m}^2$ a každý nasledujúci list formátu $B(n)$ má polovičný obsah oproti predchádzajúcemu, teda $S(B(n)) = \frac{\sqrt{2}}{2^n} \text{ m}^2$ pre každé nezáporné celé n .

Pretože ďalej $S(A0) = 1 \text{ m}^2$ a každý nasledujúci list formátu $A(n)$ má polovičný obsah oproti predchádzajúcemu, je $S(A(n)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \text{ m}^2$ pre každé n . Teda

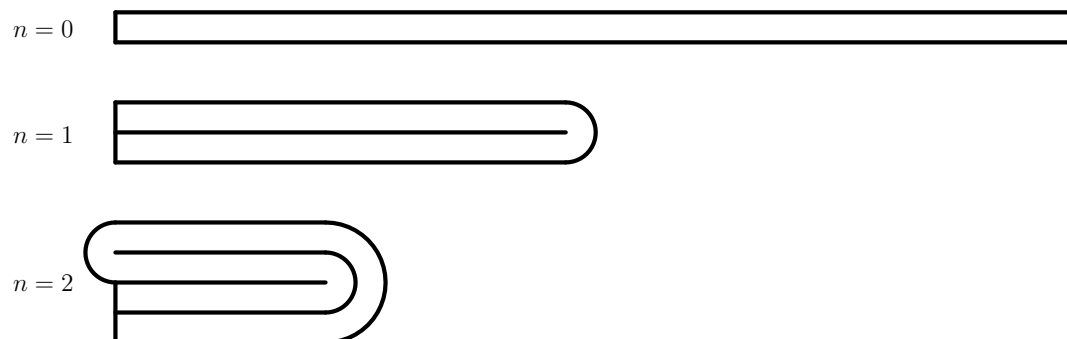
$$\sqrt{S(A(n)) \cdot S(A(n+1))} = \sqrt{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}} = \sqrt{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} = S(B(n+1)).$$

Skladanie papiera

Možno vás už niekedy napadla otázka, koľkokrát je možné preložiť papier formátu A4 napoly a možno ste si to aj sami vyskúšali. Pravdepodobne vás ale ani nenapadlo, že odpoveď na túto otázku môže dať matematik, ani papier nemusí vôbec prekladať.

Predstavme si nasledujúci jednoduchý model prekladania papiera.



Obr. 2: Model preloženia papiera

Pri preložení papiera napolovicu sa nám vždy časť papiera spotrebuje na vytvorenie skladu. Jeho tvar si môžeme modelovať ako polovicu kružnice, ktorej polomer je rovný hrúbke papiera. Navyše si tiež môžeme všimnúť, že papier sa pri prekladaní vrství. Na začiatku máme len jednu vrstvu, po prvom preložení dve vrstvy, po druhom preložení štyri vrstvy atď. V ďalších úlohách budeme pracovať s týmto modelom.

Úloha 4. Aká by bola hrúbka navrstveného kancelárskeho papiera po štyroch, siedmych, desiatich, dvadsiatich jeden a štyridsiatich dvoch preloženiach? Predpokladajme, že hrúbka nášho listu papiera je $t_0 = 0,1$ mm.

Riešenie. Je možné si ľahko všimnúť, že po k preloženiach dostaneme celkom 2^k vrstiev papiera. Hrúbky by tak boli

$$t_4 = t_0 \cdot 2^4 = 1,6 \text{ mm}$$

$$t_7 = t_0 \cdot 2^7 = 12,8 \text{ mm}$$

$$t_{10} = t_0 \cdot 2^{10} = 102,4 \text{ mm}$$

$$t_{21} = t_0 \cdot 2^{21} \approx 209,7 \text{ m}$$

$$t_{42} = t_0 \cdot 2^{42} \approx 439\,804 \text{ km}$$

Podľa výsledkov predchádzajúcej úlohy je vidieť, že pre prekladanie papiera musí existovať nejaký limit. Jednou z možností, ako tento limit poznať, je skúmanie koľko papiera sa nám pri prekladaní vlastne stráca pri vytváraní skladu.

Úloha 5. Aké množstvo papiera sa “stratí” pri jeho skladaní?

Riešenie. Uvažujme papier o hrúbke t . Pri prvom preložení sa na sklade vytvorí polkružnica o polomere t (pozri predchádzajúci obrázok), na preloženie teda potrebujeme πt papiera. Pri druhom preložení sa vytvoria dve polkružnice. Jedna o polomere t a druhá o polomere $2t$, potrebujeme teda $\pi t + 2\pi t$ papiera a dohromady

$$\pi t + (\pi t + 2\pi t).$$

Pri treťom preložení sa vytvoria polkružnice o polomeroch t , $2t$, $3t$ a $4t$. Stratíme teda $\pi t + 2\pi t + 3\pi t + 4\pi t$

papiera. Celková strata bude

$$\pi t + (\pi t + 2\pi t) + (\pi t + 2\pi t + 3\pi t + 4\pi t)$$

Analogicky po n zloženiach stratíme

$$\pi t + (\pi t + 2\pi t) + \dots + (\pi t + 2\pi t + \dots + 2^{n-1}\pi t)$$

papiera. Vyňatím πt si môžeme všimnúť, že máme v zátvorkách súčet prvých členov aritmetickej postupnosti

$$\pi t [1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3 + 4) + \dots + (1 + 2 + \dots + 2^{n-1})].$$

Použitím opakovaného vzorca pre súčet prvých členov aritmetickej postupnosti dostaneme

$$\frac{\pi t}{2} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \dots + 2^{n-1} \cdot (2^{n-1} + 1)).$$

Tu je možné k -tý člen všeobecne zapísať ako

$$2^{k-1} \cdot (2^{k-1} + 1) = (2^2)^{k-1} + 2^{k-1}.$$

Vzťah pre celkovú stratu papiera teda môžeme prepísať v tvare

$$\frac{\pi t}{2} [(2^2)^0 + (2^2)^1 + \dots + (2^2)^{n-1}] + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}).$$

Dostávame tak súčet prvých členov dvoch geometrických postupností, môžeme teda použiť vzorec pre ich súčet a dostaneme

$$\frac{\pi t}{2} \left(\frac{2^{2n} - 1}{3} + 2^n - 1 \right).$$

Po vyňatí $\frac{1}{3}$ zo zátvorky máme

$$\frac{\pi t}{6} ((2^n)^2 + 3 \cdot 2^n - 4)$$

a rozkladom na súčin získame

$$\frac{\pi t}{6} (2^n + 4)(2^n - 1).$$

Tento posledný vzťah vlastne vyjadruje akýsi odhad minimálnej dĺžky papiera hrúbky t , ktorý potrebujeme, aby sme ho mohli n -krát preložiť.

Úloha 6. Koľkokrát je možné preložiť typický kancelársky papier formátu A4 o hrúbke 0,1 mm?

Riešenie. Využitím výsledku predchádzajúcej úlohy vieme, že hľadáme také najväčšie prirodzené n , aby platilo

$$\frac{\pi \cdot 0,1}{6} (2^n + 4)(2^n - 1) < 297.$$

Presné riešenie tejto nerovnice by nebolo úplne jednoduché, ale našťastie nie je nutne potrebné. Stačí nám dosadiť nejaké vhodné n :

$$\frac{\pi \cdot 0,1}{6} (2^6 + 4)(2^6 - 1) \doteq 224,31;$$

$$\frac{\pi \cdot 0,1}{6} (2^7 + 4)(2^7 - 1) \doteq 877,76.$$

Podľa tohto modelu je teda možné papier danej veľkosti prehnúť maximálne šesťkrát.

Pre zaujímavosť dodajme, že ako prvá rovnicu z Úlohy 5 odvodila stredoškolská študentka Britney Gallivan z Kalifornie, ktorá je momentálne držiteľkou svetového rekordu v Guinnessovej knihe rekordov za najväčší počet preložení papiera napoly. Celkom preložila papier dvanásťkrát. Na to však nemohla použiť normálny papier formátu A4, ale použila toaletný papier dĺžky 1 219 metrov. Navyše použila inú techniku skladania (striedala smery).

Literatúra

1. Niss, Mogens; Bluem Werner. *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*, Routledge 2020, 978-1-315-18931-4
2. *Most times to fold a piece of paper*. <https://www.guinnessworldrecords.com/world-records/494571-most-times-to-fold-a-piece-of-paper>
3. *Wikipedia. Paper size*. https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_size