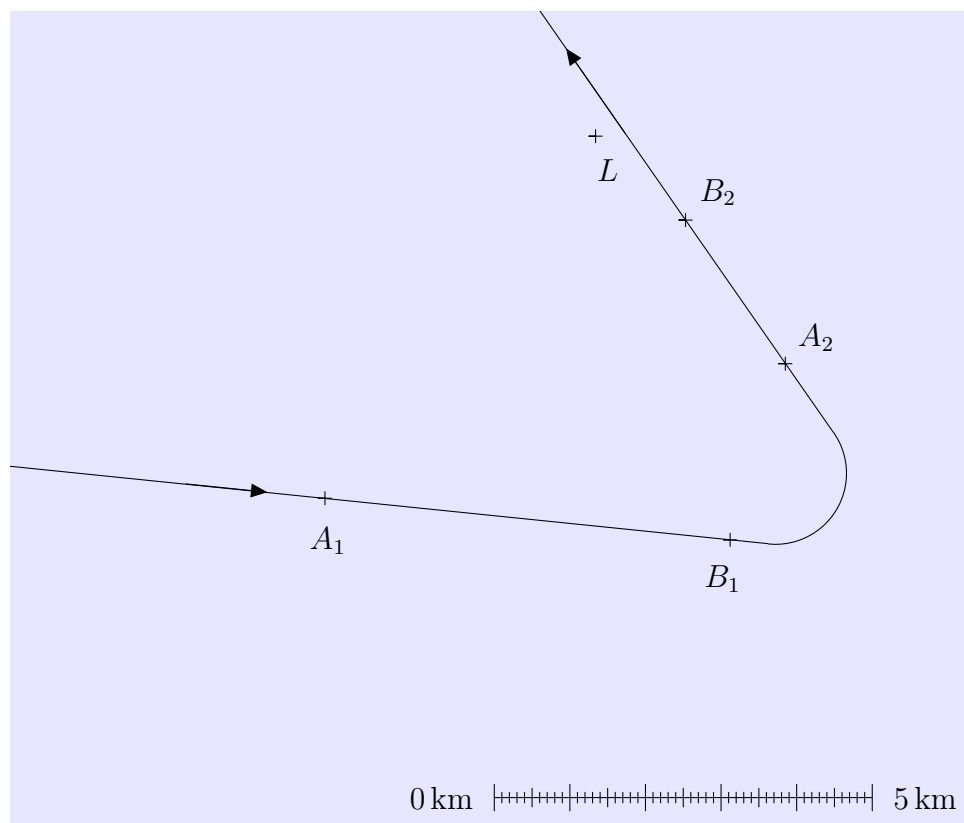


Záchrana stroskotanca

Keywords: geometria v rovine, Pytagorova veta, os úsečky

Lietadlo hľadá na otvorenom mori pozíciu stroskotanca, ktorý má na svojom člne zariadenie vysielajúce tiesňový signál. Zariadenie má len obmedzený dosah. Pri lete nad morom posádka lietadla signál zachytí, ale po chvíli ho stratí. Pilot preto lietadlo stočí a podarí sa mu signál na kratší dobu opäť zachytiť.

Trajektória celého letu je aj s naznačeným smerom a miestami zachytenia (body A_1 a A_2) a strát (body B_1 a B_2) signálu znázornená na mape.



Obr. 1: Trajektória letu lietadla

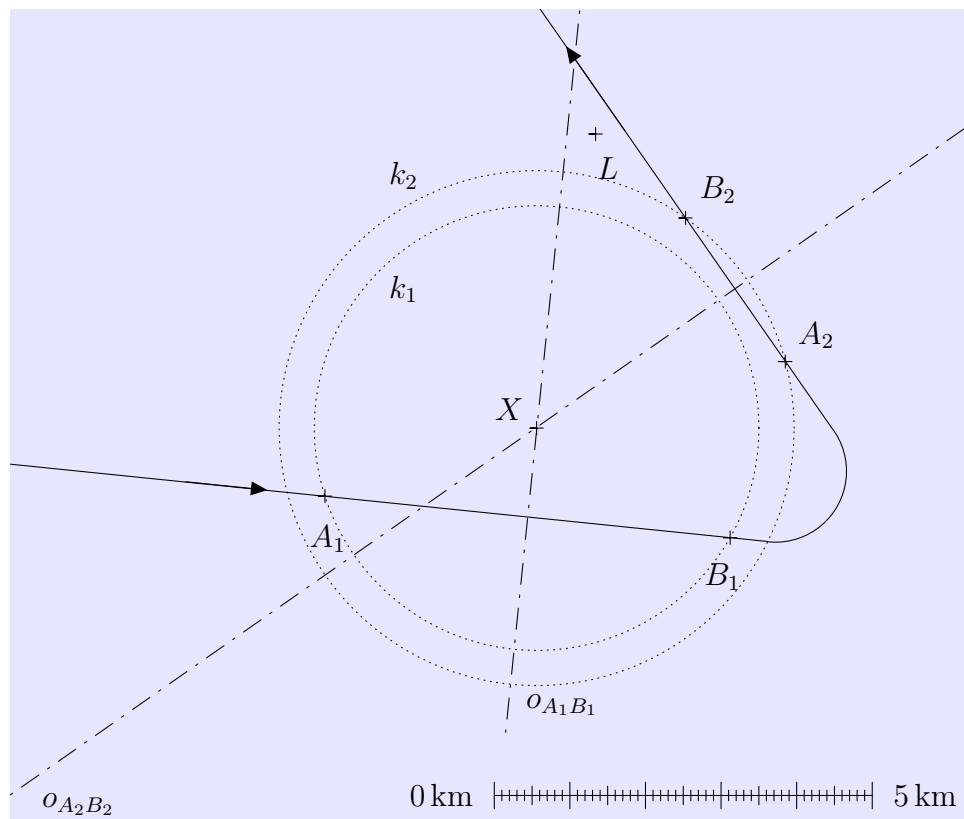
Počas oboch dôb, keď posádka prijímala signál, lietadlo nemalo svoju výšku, medzi bodmi B_1 a A_2 znížilo svoju výšku o 500 m.

Úloha 1. Konštrukčne určte v mape pozíciu X stroskotanca.

Riešenie. Obmedzený dosah stroskotancovho tiesňového signálu určuje v priestore nad hladinou pologuľu, ktorej stred je polohou stroskotanca. Vodorovné rezy tejto pologule sú kruhy, ktoré sa na mape javia ako sústredné so stredom v bode X .

Pretože lietadlo medzi bodmi A_1 a B_1 nemení svoju výšku, je A_1B_1 tetivou istej kružnice k_1 so stredom v bode X . Ten tak musí ležať na osi úsečky A_1B_1 . Z rovnakého dôvodu musí bod X ležať aj na osi

úsečky A_2B_2 ; je totiž stredom istej kružnice k_2 , ktorej je táto úsečka tetivou.



Obr. 2: Riešenie Úlohy 1

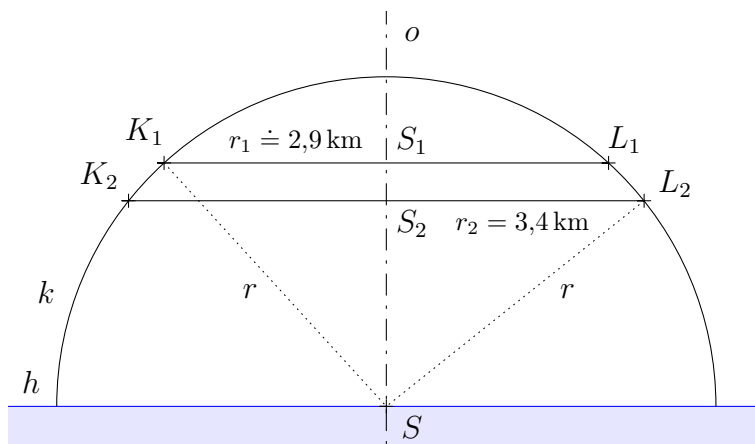
Úloha 2. V lokalite sa nachádza dopravná loď (pozícia L). Môže tiež zaznamenať stroskotancov tiesňový signál, alebo je príliš ďaleko?

- Velkosti úsečiek LX a A_1X , A_2X z riešenia Úlohy 1 preneste na mierku. Užitím takto určených vzdialeností (zaokrúhlených na celý najmenší dielok stupnice) vyriešte úlohu početne.
- Vychádzajte z riešenia Úlohy 1 a úlohu vyriešte znovu, tentoraz len užitím geometrických konštrukcií.

Riešenie.

- Na vyriešenie úlohy potrebujeme poznať dosah stroskotancovho zariadenia, čo je polomer r pologule zmienený v riešení predošlej úlohy. Prenesením úsečiek A_1X a A_2X na mierku a zaokrúhlením ich dĺžok na desatiny kilometra dostávame $|A_1X| \doteq 2,9$ km a $|A_2X| \doteq 3,4$ km. Tieto dĺžky sú zrejme polomery r_1 a r_2 kružníc k_1 a k_2 .

Uvažujme taký priemet pologule, v ktorom sa kružnice k_1 a k_2 zobrazia po rade ako rovnobežné úsečky K_1L_1 a K_2L_2 také, že majú rovnakú os o , ich dĺžky sú po rade $2r_1$ a $2r_2$ a ich vzdialenosť je 0,5 km. Označme ďalej stred pologule S , stred úsečky K_1L_1 ako S_1 a stred úsečky K_2L_2 ako S_2 . Pozri obrázok, v ktorom je pre názornosť vyznačená aj morská hladina priamkou h .



Obr. 3: Pomocný priemet poglobule pri riešení Úlohy 2a)

Z Pytagorovej vety aplikovanej na trojuholníky SS_1K_1 a SS_2L_2 plynú rovnosti

$$r^2 = r_1^2 + |SS_1|^2$$

$$r^2 = r_2^2 + |SS_2|^2.$$

Platí však $|SS_1| = |SS_2| + 0,5$. Dosadením do prvej rovnice a porovnaním oboch strán dostávame lineárnu rovnicu s jedinou neznámou $|SS_2|$, ktorú vyriešime:

$$r_2^2 + |SS_2|^2 = r_1^2 + (|SS_2| + 0,5)^2$$

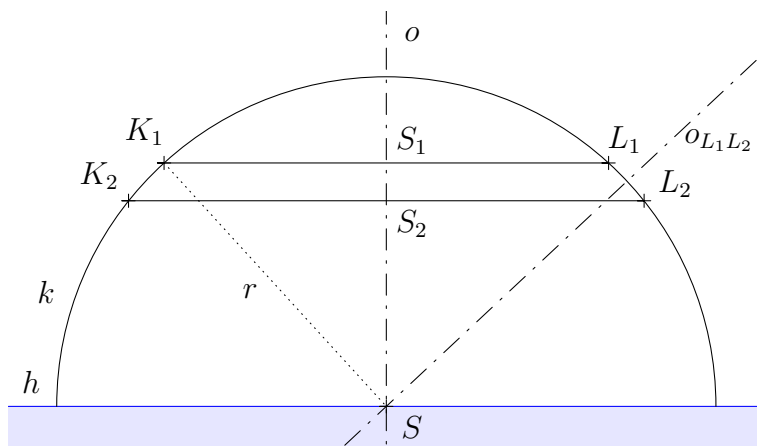
$$|SS_2| = r_2^2 - r_1^2 - 0,25$$

Vyjadrením r z druhej rovnice a následným dosadením dostávame

$$r = \sqrt{r_2^2 + (r_2^2 - r_1^2 - 0,25)^2} \doteq 4,5 \text{ km}.$$

Vzdialenosť lode od stroškotanca je dĺžkou úsečky LX . Prenesením tejto úsečky na mierku vyčítame $|LX| \doteq 4,0 \text{ km}$, úsečka je teda kratšia než dosah r stroškotancovho signálu. Loď preto môže tento signál zaznamenať.

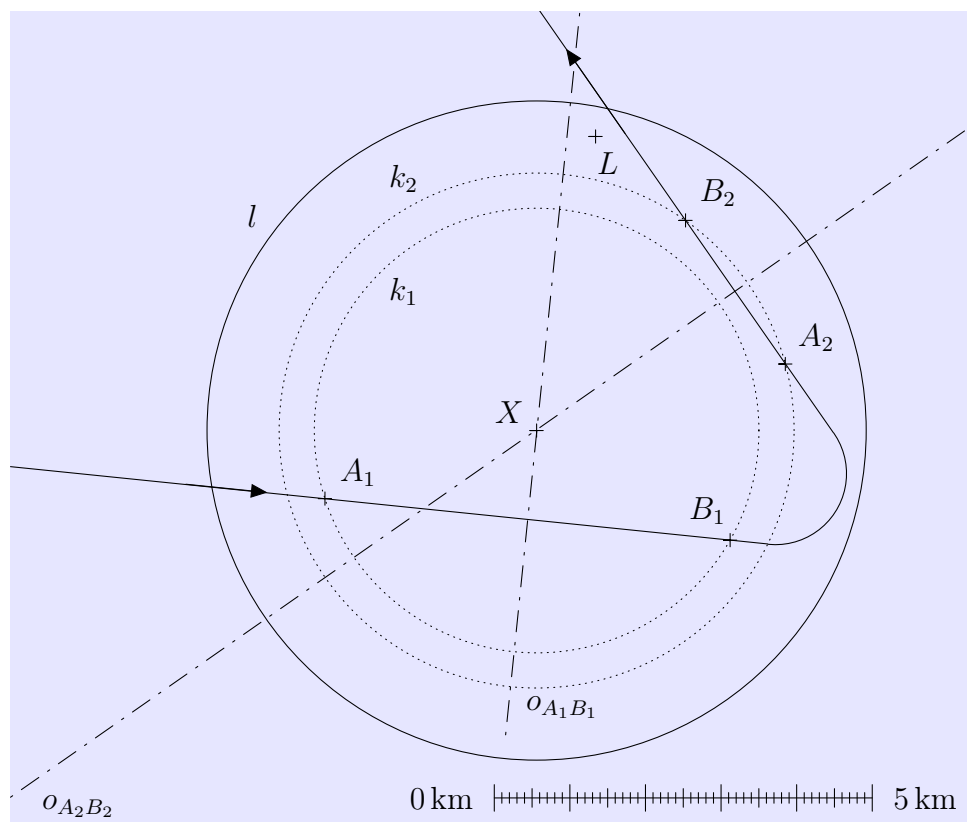
- b) Na odvodenie konštrukčného riešenia úlohy (t. j. skonštruovanie polomeru r poglobule) využijeme rovnaký pomocný priemet poglobule ako v Úlohe 2a. Stred poglobule S je priesečníkom spoločnej osi o úsečiek K_1L_1 a K_2L_2 a osi úsečky L_1L_2 , pretože tá je tetivou obrysu polkružnice k . Hľadaný polomer r je potom napr. veľkosťou úsečky SK_1 , pozri obrázok.



Obr. 4: Pomocný priemet pologule pri riešení Úlohy 2b)

Pri samotnom vykonaní konštrukcie prenášame vzdialenosti r_1 a r_2 z riešenia Úlohy 1 (kde pripomínáme, že platí $r_1 = |A_1X|$ a $r_2 = |A_2X|$), vzdialenosť stredov kružníc $|S_1S_2| = d_{0,5}$, kde $d_{0,5}$ označuje vzdialenosť na mape zodpovedajúcu 0,5 km, ktorú nanášame z mierky.

Priemet pologule na mape ohraničuje kružnica l so stredom v bode X a polomerom r , ktorý prenosieme z pomocného priemetu. Po skonštruovaní tejto kružnice je vidieť, že sa loď nachádza v dosahu núdzového signálu.



Obr. 5: Riešenie Úlohy 2b)