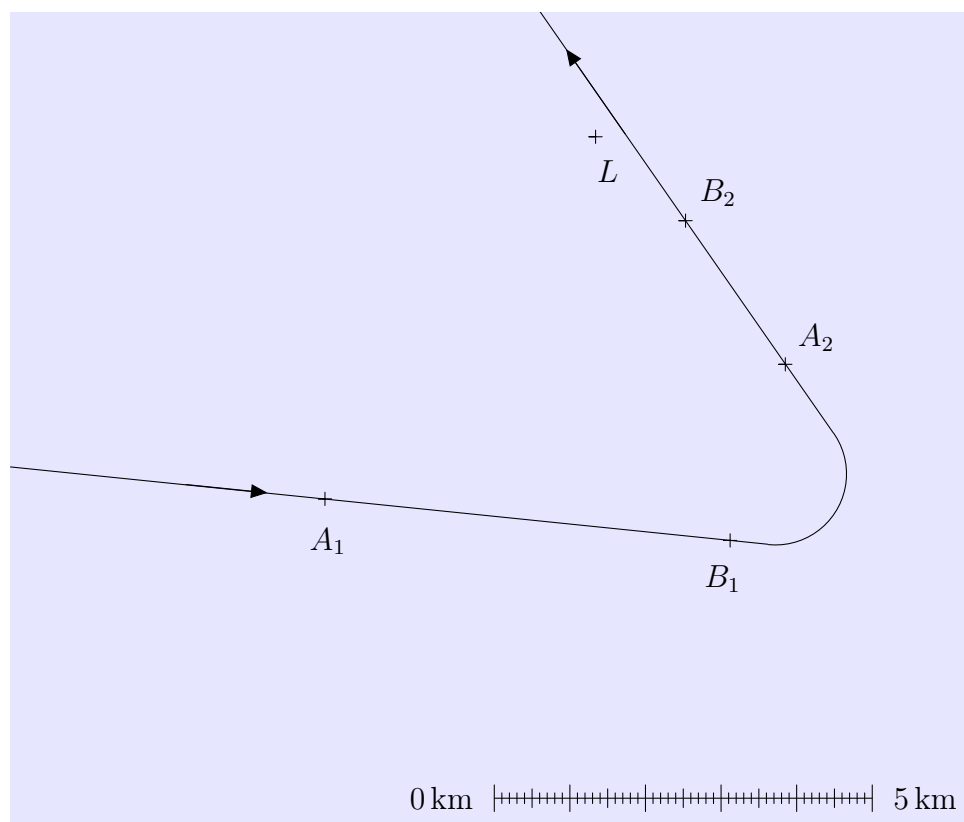


Ratowanie rozbitka

Keywords: geometria płaska, twierdzenie Pitagorasa, symetria

Samolot przeszukuje otwarte morze w poszukiwaniu rozbitka, który ma na swojej tratwie urządzenie wysyłające sygnał SOS. Urządzenie ma ograniczony zasięg. Podczas lotu nad morzem załoga odbiera sygnał, ale po chwili sygnał zanika. Pilot zawraca samolot i udaje się ponownie odebrać sygnał, choć tylko na krótko.

Trajektoria całego lotu, w tym kierunek podróży i punkty, w których sygnał został odebrany (punkty A_1 i A_2) oraz utracony (punkty B_1 i B_2), jest pokazana na mapie.



Rysunek 1: Flight trajectory of the aircraft

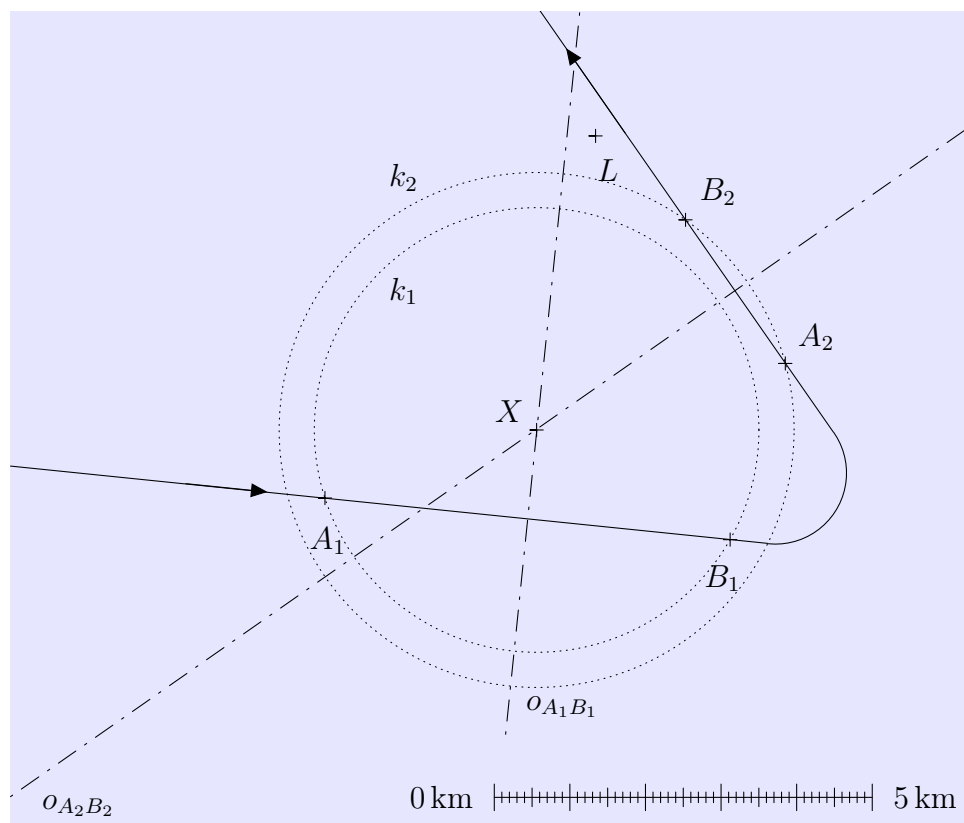
W obu okresach, kiedy załoga odebrała sygnał, samolot utrzymywał stałą wysokość. Między punktami B_1 i A_2 samolot opadł o 500, m.

Ćwiczenie 1. Wykorzystaj konstrukcję geometryczną na mapie, aby określić położenie X rozbitka.
Rozwiązanie. Ograniczony zasięg sygnału alarmowego rozbitka określa półkulę nad powierzchnią morza, której środek znajduje się w pozycji rozbitka. Poziome przekroje tej półkuli to okręgi, które na mapie wyglądają jak koncentryczne okręgi skupione w punkcie X .

Ponieważ samolot utrzymywał stałą wysokość między punktami A_1 i B_1 , odcinek A_1B_1 tworzy cięciwę

Results matter!

pewnego okręgu k_1 o środku w punkcie X . Dlatego punkt X musi leżeć na symetralnej odcinka A_1B_1 . Z tego samego powodu punkt X musi również leżeć na symetralnej odcinka A_2B_2 , ponieważ odcinek ten jest cięciwą innego okręgu k_2 o środku w punkcie X .



Rysunek 2: Solution to Exercise 1

Ćwiczenie 2. W okolicy znajduje się statek towarowy (pozycja L). Czy może on również odebrać sygnał SOS rozbitka, czy jest zbyt daleko?

- Przenieś długości odcinków LX , A_1X i A_2X z rozwiązania ćwiczenia 1 do podanej skali. Wykorzystując te odległości (zaokrąglone do najbliższej najmniejszej jednostki skali), rozwiąż zadanie numerycznie.
- Wykorzystując konstrukcję z ćwiczenia 1, rozwiąż zadanie ponownie — tym razem opierając się wyłącznie na konstrukcjach geometrycznych.

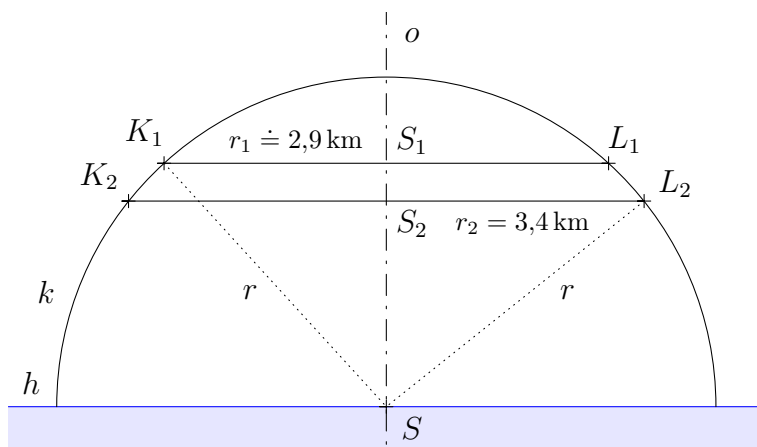
Rozwiązanie.

- Aby rozwiązać problem, musimy określić zasięg urządzenia rozbitka, którym jest promień r półkuli wspomnianej w rozwiązaniu poprzedniego zadania. Przenosząc odcinki A_1X i A_2X na skalę i zaokrąglając ich długości do najbliższej dziesiątej części kilometra, otrzymujemy $|A_1X| \doteq 2.9$ km oraz $|A_2X| \doteq 3.4$ km. Długości te są oczywiście promieniami r_1 i r_2 okręgów k_1 i k_2 .

Rozważmy rzut półkuli, w którym okręgi k_1 i k_2 pojawiają się jako równoległe odcinki K_1L_1 i K_2L_2 , tak że mają tę samą symetralną o , ich długości wynoszą odpowiednio $2r_1$ i $2r_2$, a pionowa odległość

Results matter!

między nimi wynosi 0.5 km. Niech S będzie środkiem półkuli, S_1 środkiem odcinka K_1L_1 , a S_2 środkiem odcinka K_2L_2 . Zobacz rysunek poniżej, na którym dla jasności poziom morza jest również zaznaczony jako prosta linia h .



Rysunek 3: Auxiliary projection of the hemisphere used in solving Exercise 2a)

Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów SS_1K_1 i SS_2L_2 , otrzymujemy następujące równania:

$$\begin{aligned} r^2 &= r_1^2 + |SS_1|^2 \\ r^2 &= r_2^2 + |SS_2|^2. \end{aligned}$$

Wiemy również, że $|SS_1| = |SS_2| + 0.5$. Podstawiając to do pierwszego równania i porównując oba wyrażenia, otrzymujemy równanie liniowe z jedną niewiadomą $|SS_2|$, które rozwiązujemy w następujący sposób:

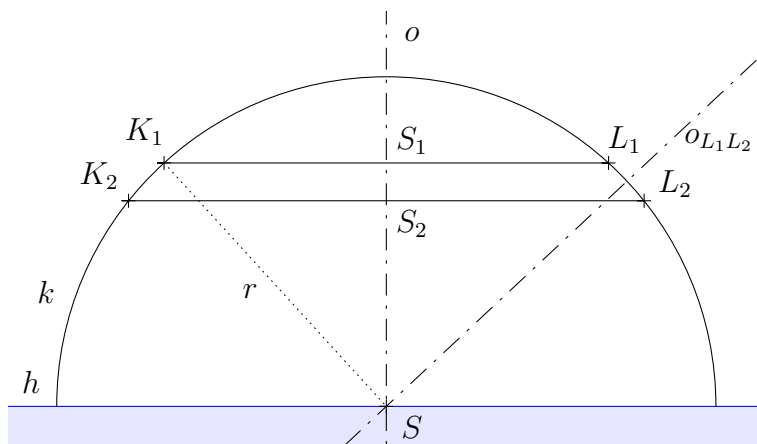
$$\begin{aligned} r_2^2 + |SS_2|^2 &= r_1^2 + (|SS_2| + 0.5)^2 \\ |SS_2| &= r_2^2 - r_1^2 - 0.25 \end{aligned}$$

Rozwiązując dla r za pomocą drugiego równania i podstawiając, otrzymujemy:

$$r = \sqrt{r_2^2 + (r_2^2 - r_1^2 - 0.25)^2} \doteq 4.5 \text{ km}.$$

Odległość od statku do rozbitki jest równa długości odcinka LX . Przenosząc ten odcinek na skalę, otrzymujemy $|LX| \doteq 4.0$ km, co jest wartością mniejszą niż zasięg r sygnału rozbitki. W związku z tym statek może odebrać sygnał.

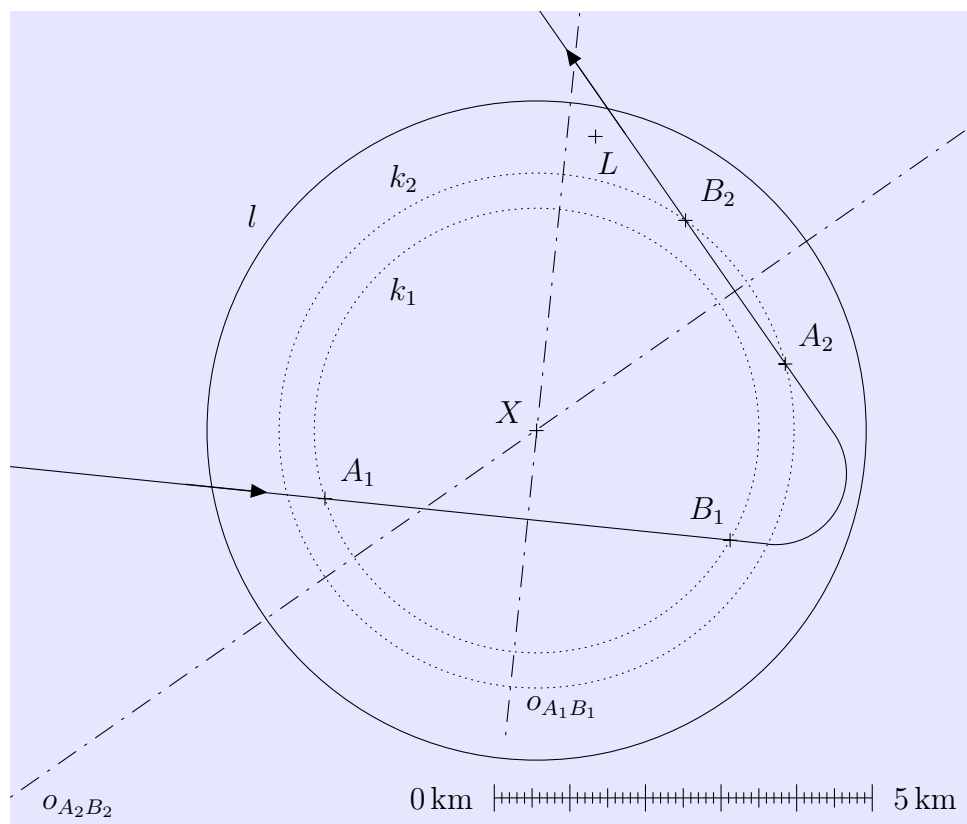
- b) Aby skonstruować geometryczne rozwiązanie zadania (tj. określić promień r półkuli), używamy tego samego pomocniczego rzutu półkuli, co w ćwiczeniu 2a. Środek półkuli S jest punktem przecięcia wspólnej symetralnej o odcinków K_1L_1 i K_2L_2 z symetralną odcinka L_1L_2 , ponieważ L_1L_2 jest cięciwą półkuli k . Pożądaną promień r jest na przykład długością odcinka SK_1 — patrz rysunek.



Rysunek 4: Auxiliary projection of the hemisphere used in solving Exercise 2b)

Aby wykonać konstrukcję, przenosimy odległości r_1 i r_2 z rozwiązania zadania 1 (przypomnijmy, że $r_1 = |A_1X|$ oraz $r_2 = |A_2X|$), a także odległość między środkami okręgów, $|S_1S_2| = d_{0.5}$, gdzie $d_{0.5}$ jest odległością na mapie odpowiadającą 0.5 km, pobraną ze skali.

Rzut półkuli na mapę jest ograniczony okręgiem l o środku w punkcie X i promieniu r , który przenosimy z rzutu pomocniczego. Po narysowaniu tego okręgu staje się jasne, że statek znajduje się w zasięgu sygnału SOS.



Rysunek 5: Solution to Exercise 2b)