Rescate de un náufrago

Keywords: geometría en el plano, teorema de Pitágoras, eje de recta

Una aeronave busca en alta mar la posición de un náufrago que lleva una señal de socorro en su balsa. El dispositivo tiene un alcance limitado. Mientras sobrevuela el mar la tripulación capta la señal, pero al cabo de un rato se pierde. El piloto, por lo tanto, da la vuelta a la aeronave y consigue captar la señal de nuevo durante un breve periodo.

La trayectoria completa del vuelo se muestra en el mapa, con la dirección indicada y las ubicaciones de adquisición de la señal (puntos A_1 a A_2) y pérdida (puntos B_1 a B_2).

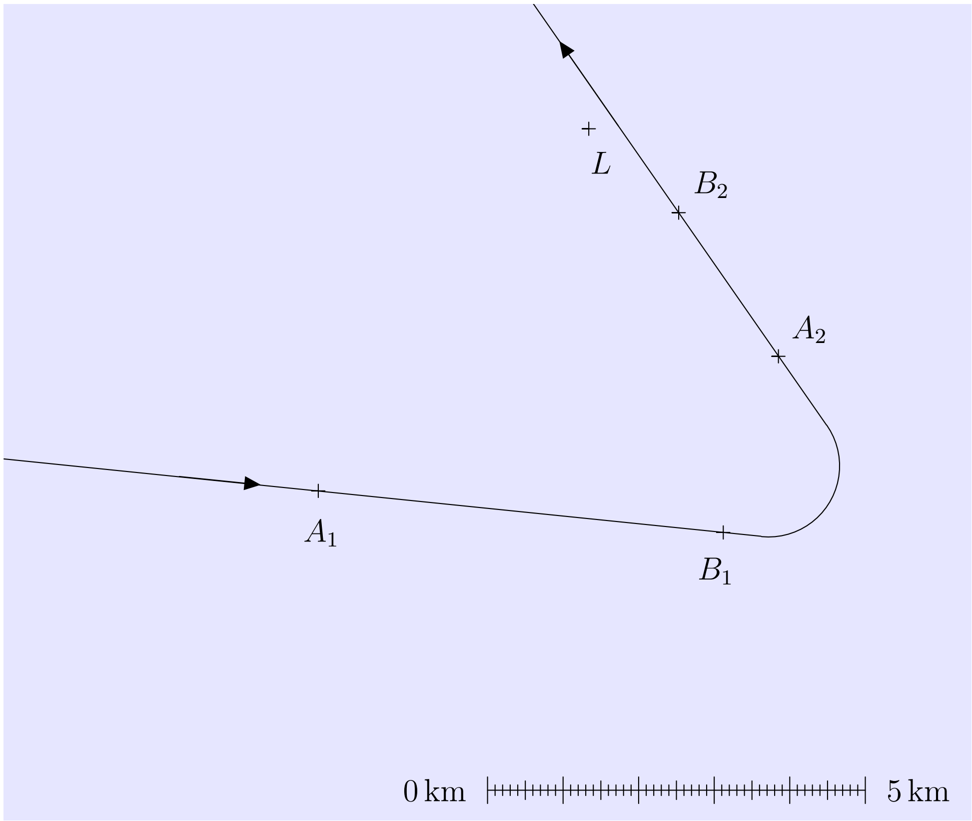

Figura 1: Trayectoria de vuelo de la aeronave

Durante ambos momentos en que la tripulación recibió la señal, la aeronave no cambió su altitud, entre los puntos B_1 y A_2 disminuyó su
altitud en $500\,\mathrm{m}$.

Tarea 1. Determinar en el mapa la posición X del náufrago.

Solución. El alcance limitado de la señal de socorro del náufrago determina un hemisferio en el espacio sobre la superficie, cuyo centro representa la posición del náufrago. Las secciones horizontales de este hemisferio son círculos que aparecen en el mapa concéntricos con el centro en el punto X.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Dado que el avión entre los puntos A_1 y B_1 no cambia de altitud, es A_1B_1 una cuerda de un círculo k_1 con centro en el punto X. Por lo tanto, este debe estar sobre el eje del segmento A_1B_1. Por la misma razón,
el punto X también debe estar sobre el eje del segmento A_2B_2; es el centro de un círculo k_2, del cual este segmento es una cuerda.

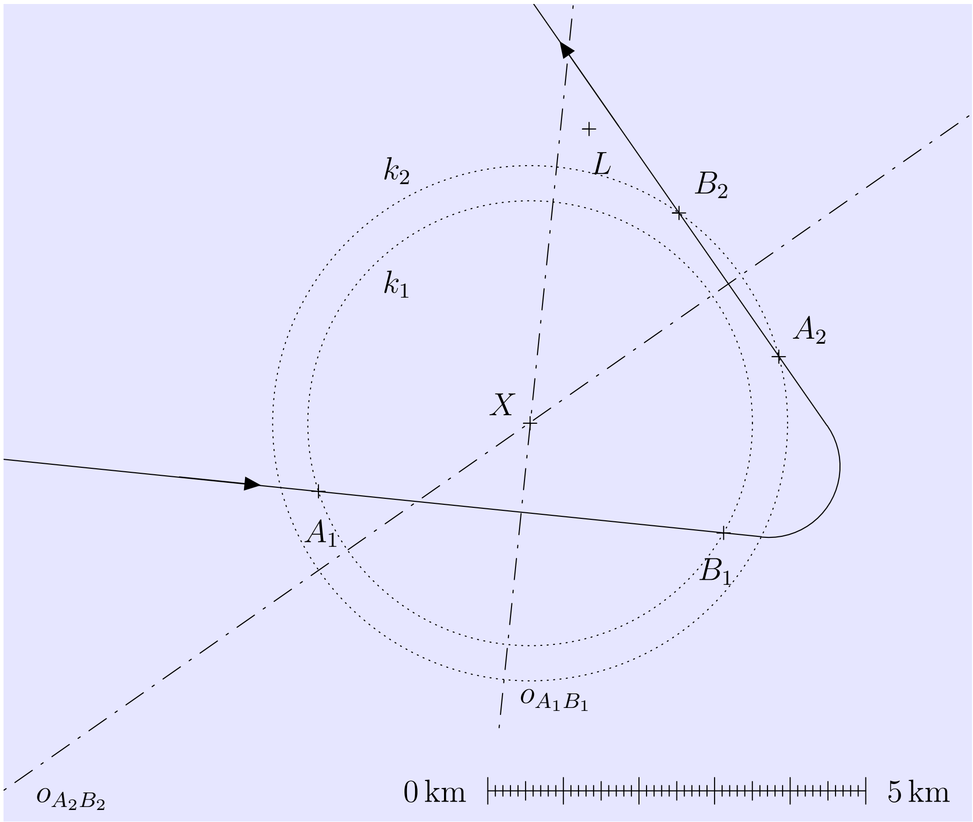

Figura 2: Solución de la Tarea 1

Tarea 2. Hay un barco de transporte en la ubicación (posición L). ¿Puede también registrar la señal de socorro del náufrago o está demasiado lejos?

a) Transfiere a escala los tamaños de los segmentos LX y A_1X, A_2X de la solución a la Tarea 1 Utilizando las distancias así determinadas (redondeadas a la división entera más pequeña de la escala), resuelve la tarea numéricamente.

b) Parte de la solución de la Tarea 1 y resuelve la tarea de nuevo, esta vez utilizando únicamente construcciones geométricas.

Solución.

a) Para resolver el problema, necesitamos conocer el alcance del dispositivo zařízení, del náufrago, que es el radio r del hemisferio mencionado en la solución del problema anterior. Al trasladar los segmentos A_1X a A_2X a escala y redondear sus longitudes a décimas de kilómetro, obtenemos $|A_1X| \doteq 2{,}9\,\text{km}$ a $|A_2X| \doteq 3{,}4\,\text{km}$. Estas longitudes son, obviamente, los radios r_1 y r_2 de los círculos k_1 a k_2.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Consideremos una proyección de un hemisferio en la que los círculos k_1 y k_2 se representan alternativamente como las líneas paralelas K_1L_1 y K_2L_2 de modo que tienen el mismo eje o, sus longitudes son $2r_1$ y $2r_2$ y su distancia es $0{,}5$ km. Señalemos además el centro del hemisferio S, el centro de la línea K_1L_1 como S_1 y el centro de la línea K_2L_2 como S_2. Véase la figura en la que, para mayor claridad, el nivel del mar también se indica mediante la línea h.

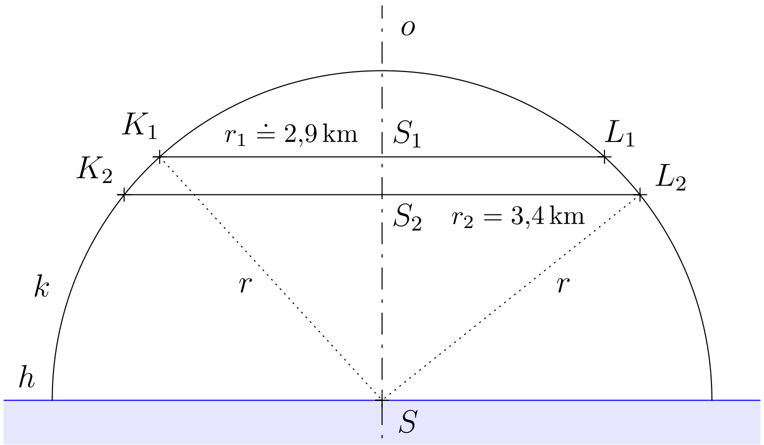

Figura 3: Proyección auxiliar del hemisferio para resolver la Tarea 2a)

El teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos SS_1K_1 y SS_2L_2 produce las siguientes igualdades

$$r^2 = r_1^2 + |SS_1|^2$$
$$r^2 = r_2^2 + |SS_2|^2.$$

Sin embargo, se cumple $|SS_1| = |SS_2| + 0{,}5$. Sustituyendo en la primera ecuación y comparando ambos lados, obtenemos una ecuación lineal con una única incógnita $|SS_2|$, que resolvemos:

$$r_2^2 + |SS_2|^2 = r_1^2 + (|SS_2| + 0{,}5)^2$$
$$|SS_2| = r_2^2 - r_1^2 - 0{,}25$$

Expresando r a partir de la segunda ecuación y sustituyéndola, obtenemos

$$r = \sqrt{r_2^2 + (r_2^2 - r_1^2 - 0{,}25)^2} \doteq 4{,}5\,\mathrm{km}.$$

La distancia entre el barco y el náufrago es la longitud del segmento de línea LX. Al transferir este segmento de línea a escala, leemos $|LX| \doteq 4{,}0$ km, que es menor que el alcance r de la señal del náufrago. Por lo tanto, el barco puede registrar esta señal.

b) Para derivar la solución constructiva del problema (es decir, para construir el radio r del hemisferio), utilizaremos la misma proyección auxiliar del hemisferio que en el Problema 2a. El centro del hemisferio S es la intersección del eje común o de los segmentos K_1L_1 y K_2L_2 con el eje del segmento L_1L_2, ya que es una cuerda del semicírculo de contorno k. El radio buscado r es entonces, por ejemplo, del tamaño del segmento SK_1, (véase la figura).

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

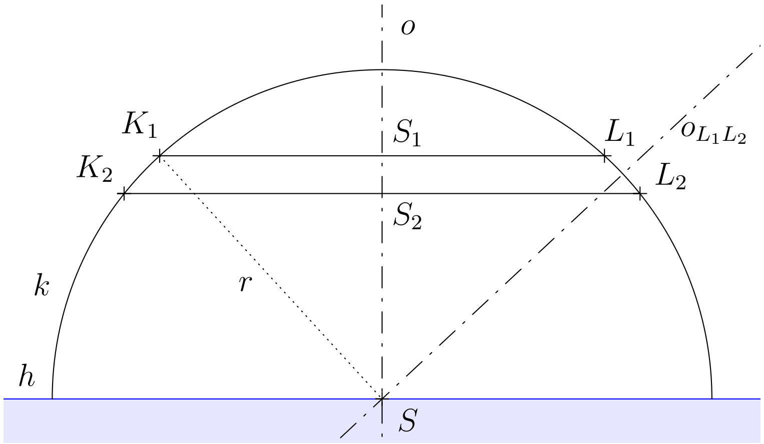

Figura 4: Proyección auxiliar del hemisferio para resolver la Tarea 2b)

Al implementar la construcción, transferimos las distancias r_1 y r_2 de la solución de la Tarea 1 (donde recordamos que $r_1 = |A_1X|$ y $r_2 = |A_2X|$), la distancia de los centros de los círculos $|S_1S_2| = d_{0,5}$, donde $d_{0,5}$ indica la distancia en el mapa correspondiente a $0{,}5$ km, que aplicamos a partir la escala.

La proyección del hemisferio en el mapa está delimitada por un círculo l con centro en el punto X y radio r, que transferimos de la proyección auxiliar. Tras construir este círculo, se observa que el barco se encuentra dentro del alcance de la señal de socorro.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.

Funded by the European Union

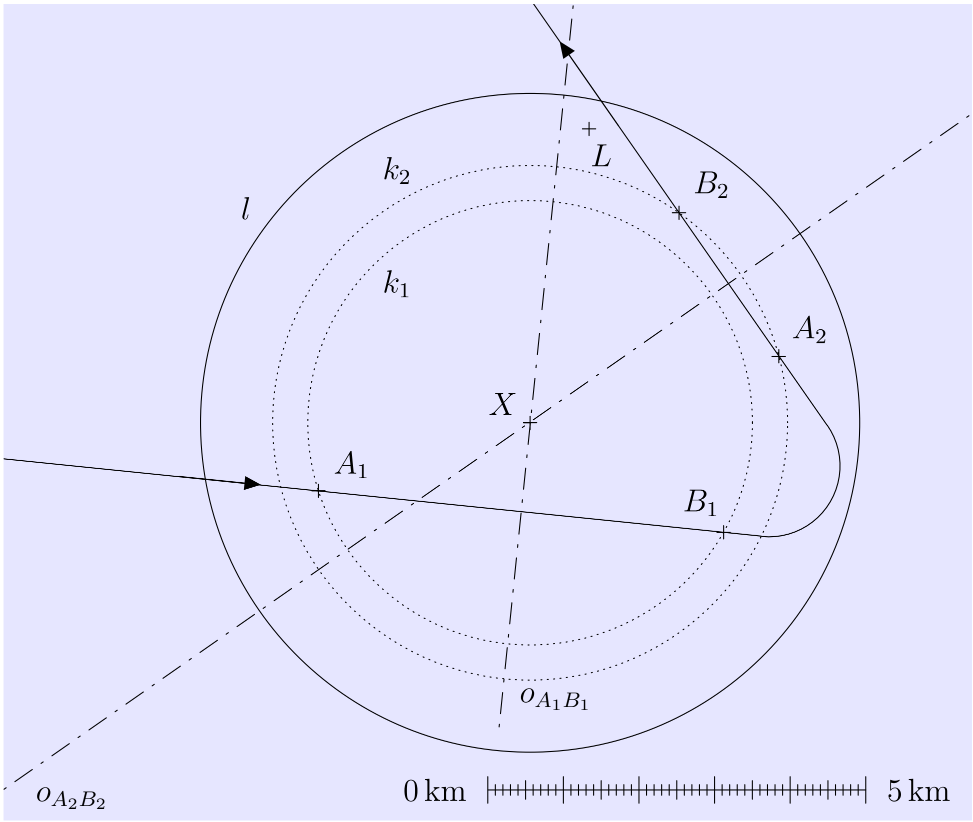

Figura 5: Solución de la Tarea 2b)

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union