

Anamorfózy

Keywords: geometria v priestore, anamorfózy, telesá, premietanie, stredové premietanie, perspektíva

Anamorfózy vo výtvarnom umení

Anamorfóza je druh vizuálneho triku či umenia, pri ktorom časť roviny alebo priestoru videná z určitého uhla odhaľuje skrytý obraz. Anamorfóza závisí od toho, či pozorovateľ nájde správne miesto, odkiaľ sa pozeráť. Tento druh umenia má dlhú a bohatú históriu. Jedným z najznámejších obrazov využívajúcich anamorfózy sú Vělvyslanci (1533) nemeckého maliara Hansa Holbeina mladšieho (1497 – 1543).



Obr. 1: Vělvyslanci

V dolnej časti obrazu je namaľovaný istý podivný predĺžený objekt. O čo ide je možné rozoznať len vtedy, ak sa postavíte k stene pri pravom ráme obrazu a zadívate sa tým smerom. Ak nájdete správnu pozíciu, odkiaľ sa pozeráť, uvidíte, že ide o lebku.

Anamorfné umenie môže využívať aj odrazy obrazov alebo sôch vo valci¹.

Ku koncu 20. storočia zažilo anamorfné umenie veľké oživenie vo fotografii, kresbe a veľkoplošných inštaláciách. Niektorí umelci vytvárajú anamorfné obrazy z predmetov dennej potreby ako elektronika, alebo obuv a ponožky². S anamorfózami sa môžeme stretnúť aj v rámci street artu. Často ide o kresby

¹https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Anamorphic_frog_sculpture_by_Jonty_Hurwitz.jpeg.

²https://www.youtube.com/watch?v=y__zPc3MZm4.

na chodníku, ceste či na stene, ktoré náhodného okoloidúceho prekvapia a na okamih zamedzia. Môže ísť napríklad o kresbu, ktorá vyzerá ako diera v zemi, do ktorej hrozí pád, nohy vyčnievajúce zo steny či kanála a podobne. Anamorfózy založené na stredovom premietaní sú presvedčivejšie, ak ich sledujeme jedným okom alebo cez objektív. Ak je ale stred premietania dostatočne ďaleko od pozorovaného objektu, je dobre vystienený alebo jeho okolie nejako podporuje dojem priestoru, je ilúzia presvedčivejšia.

Praktické využitie

Vo filmovom priemysle sa na natáčanie filmov niekedy používajú kamery s anamorfnými šošovkami. Tie boli pôvodne navrhnuté z toho dôvodu, aby širokoformátové snímky plne využívali plochu štandardných filmových políčok s výškou 35 mm. Inak by širokoformátové snímky ponechali hornú a spodnú časť rámčeka nevyužitú. Napriek príchodu digitálnych snímačov s veľkým rozlíšením sa anamorfné objektívy používajú pre unikátnosť výsledného obrazu aj v dnešnej dobe.

V niektorých mestách zavádzali priechody pre chodcov, ktoré v určitom okamihu vyzerali z pohľadu prichádzajúceho vodiča ako levitujúce hranoly. Po krátkej skúšobnej dobe boli väčšinou zrušené, pretože pred nimi vodiči brzdili príliš prudko.

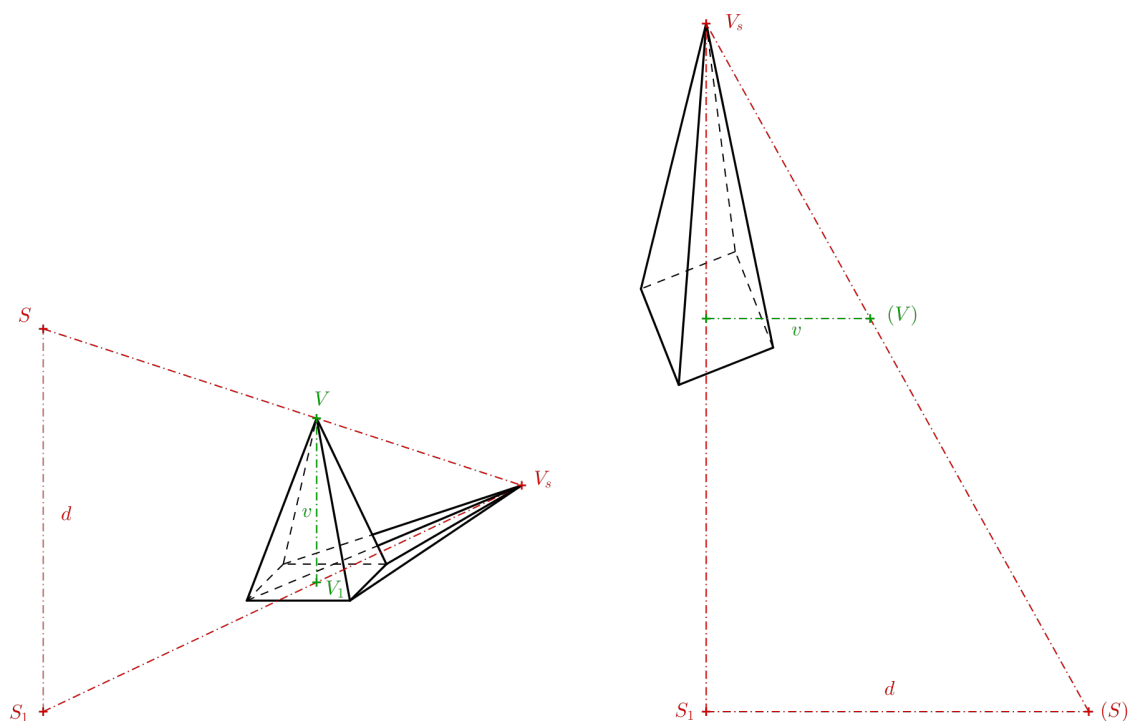
Techniku anamorfnéj projekcie môžeme vidieť na niektorých športových štadiónoch, keď sa používa na propagáciu firemných značiek, ktoré sú namaľované na hraciu plochu. Z uhla televíznej kamery sa nápis javí ako nápisy stojace zvisle v rámci hracej plochy.

Anamorfózy základných telies

V nasledujúcom texte a príkladoch vytvoríme anamorfózy základných telies pomocou stredového premietania do roviny. Rovine, v ktorej tieto anamorfné obrazy budeme rysovať budeme hovoriť priemetňa. Priemetňou pre nás bude papier, na ktorý budeme rysovať. Tým budeme obmedzení, čo sa týka veľkosti objektov. Vzniknuté obrazy potom budeme pozorovať okom kamery cez mobil alebo fotoaparát. Ak máte možnosť, môžete anamorfné obrazy vytvárať vonku, ideálne mimo komunikácií.

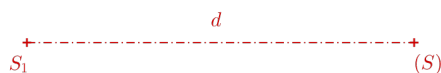
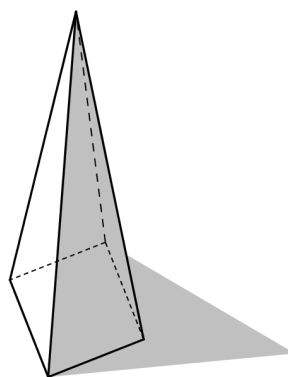
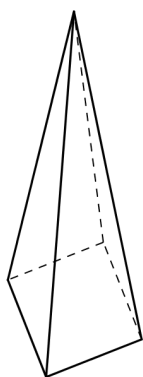
Ihlan a kužeľ

Asi najjednoduchšie je vytvoriť anamorfné obrazy ihlana a kužeľa, ak teda ich podstavy ležia v priemetniach. Podme si princíp vysvetliť na ihlane. Okrem telesa je treba zadať aj stred premietania S a jeho kolmý priemet do priemetne S_1 . Stred premietania si môžeme predstaviť ako oko pozorovateľa. Kolmý priemet ako miesto, kde pozorovateľ stojí. Vzdialenosť $S_1S = d$ je teda vzdialenosť stredy premietania od priemetne. U pravidelného štvorbokého ihlana obdobne označíme jeho vrchol ako V a kolmý priemet vrcholu do priemetne V_1 . Priesečník priamky SV (takzvaného premietacieho lúča) s priemetňou potom získame ako priesečník priamky SV s priamkou S_1V_1 (pozri nasledujúci obrázok vľavo). Taký obrázok je dobré si načrtnúť, keď premýšľame, ako ilúzia funguje, a ako bude stredový priemet vyzeráť. Pre určenie anamorfózy ihlana ale tento priestorový obrázok treba nie je.



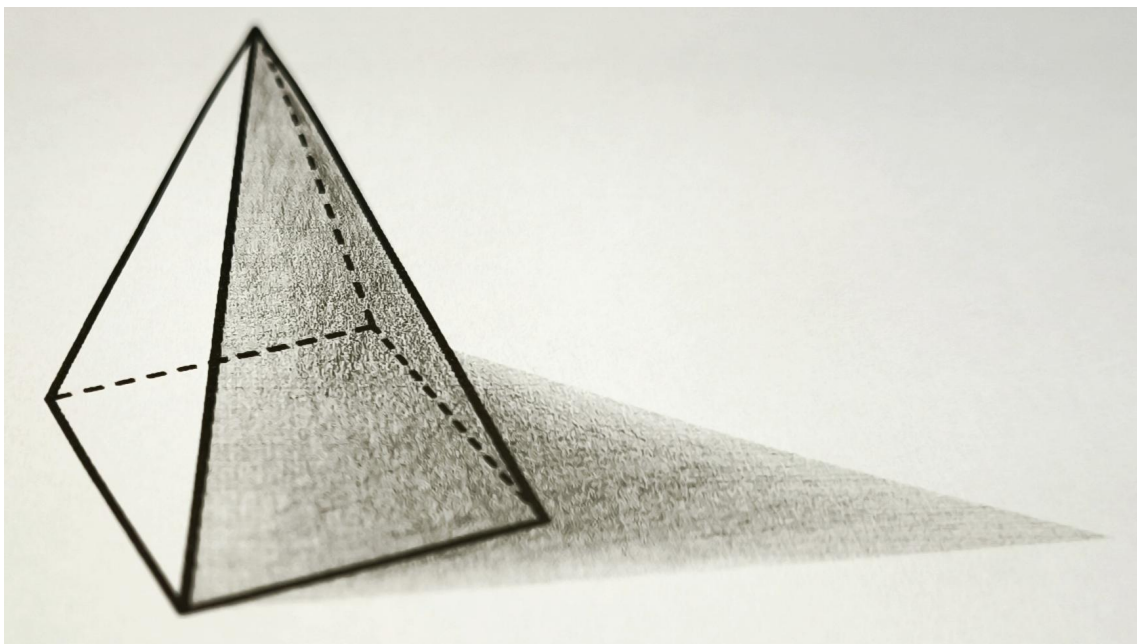
Obr. 2: Anamorfóza ihlana

Dôležitý je pre nás len lichobežník S_1V_1VS , ktorý si môžeme znázorniť aj v priemetni ako lichobežník $S_1V_1(V)(S)$ (predchádzajúci obrázok vpravo). Body, ktoré boli predtým v priestore mimo priemetne (body V a S) teraz v priemetni uvádzame v zátvorke, aby sme ich vzájomne odlíšili. Body (V) a (S) vznikli pootočením roviny S_1VS o 90° do priemetne okolo priamky S_1V_1 . Ak poznáme výšku ihlana, vzdialenosť oka pozorovateľa od priemetne, a vzdialenosť S_1V_1 , potom môžeme lichobežník narysovať. Predĺžením jeho strán, ktoré nie sú vzájomne rovnobežné, dostaneme priesečník V_s .



Obr. 3: Anamorfóza ihlana

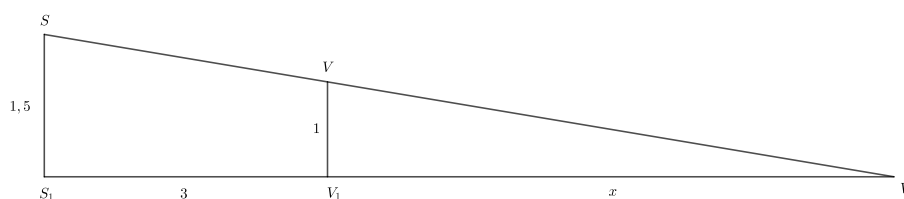
Výsledok (pozri predchádzajúci obrázok vľavo) je vhodné nakresliť bez pomocných čiar. Môžeme sa naň pozrieť okom kamery. Pri prehliadke cez oko kamery zistíme, že neviditeľné hrany dolnej podstavy je vhodné nakresliť hustšou čiarkovanou čiarou než priemet neviditeľnej bočnej hrany. Ak chceme, aby ihlan vyzeral vierohodne, obrázok vystienujeme. Tieň môžeme len odhadnúť, vrhnutý tieň vrcholu si môžeme zvoliť. Anamorfóza ihlana je hotová, kameru fotoaparátu (aby ilúzia fungovala), je treba nastaviť nad bod S_1 vo výške rovnjej vzdialenosti $S_1(S)$. Výsledný obraz cez oko kamery by mal vyzeráť približne ako na nasledujúcom obrázku.



Obr. 4: Anamorfóza ihlana, pohľad kamerou zo stredu S

Úloha 1. Chceme na zem nakresliť tvar, ktorý bude v priestore vyzerať ako kužeľ o výške 1 m a s podstavou o polomere $r = 0,4$ m. Stred premietania budeme opäť značiť S a S_1 jeho kolmý priemet. Predpokladáme, že oko priemerného pozorovateľa je vo výške 150 cm od zeme. V akej vzdialenosti musí byť V_s od V_1 (V_s je stredový priemet vrcholu kužeľa do priemetne, V_1 je kolmý priemet vrcholu kužeľa do priemetne)?

Riešenie. Trojuholníky S_1V_sS a V_1V_sV sú podobné.



Obr. 5: Výška kužeľa

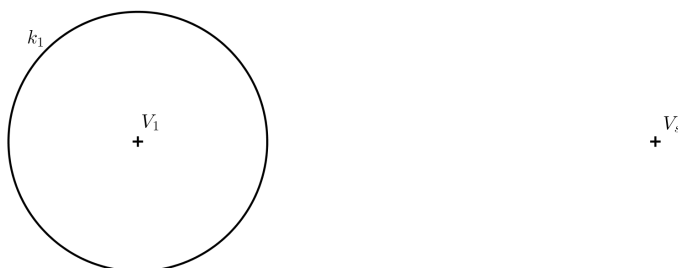
Platí teda, že pomery príslušných strán sú si rovné:

$$\frac{x}{1} = \frac{x+3}{1,5},$$

$$1,5x = x + 3,$$

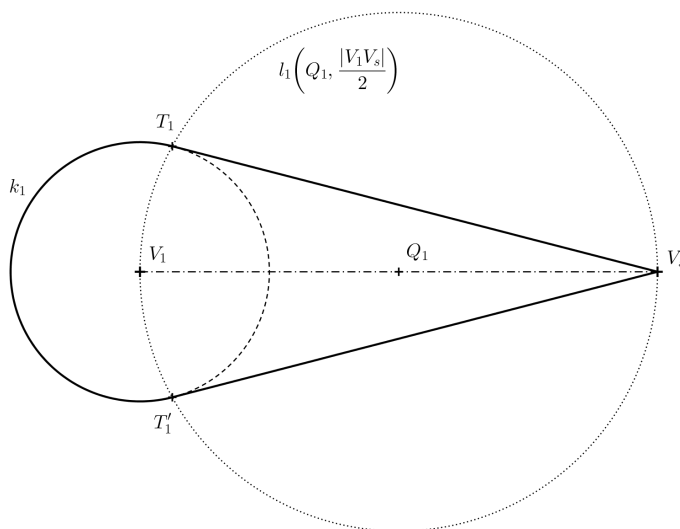
odkiaľ dostávame $x = 6$. Vzdialenosť bodu V_s od V_1 musí byť 6 metrov.

Úloha 2. Máme danú podstavnú kružnicu k so stredom V_1 a bod V_s (zadanie pozri obrázok). Predstavme si teraz v priestore rotačný kužeľ s podstavnou kružnicou k a stred premietania S , také že V_s je stredový priemet vrcholu kužeľa. V_1 je kolmý priemet vrcholu kužeľa do priemetne (na papier). Určte obrys stredového priemetu kužeľa.



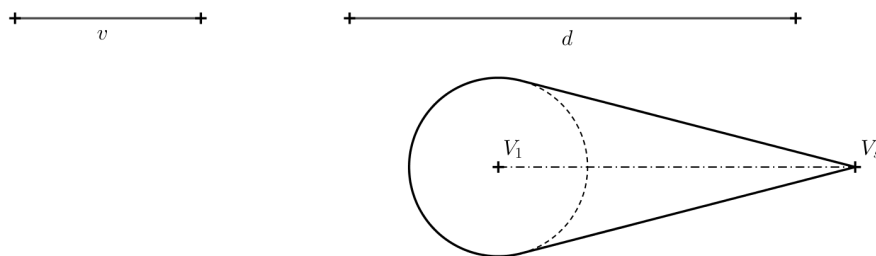
Obr. 6: Zadanie úlohy 2

Riešenie. Obrys kužeľa bude (okrem časti podstavnej kružnice) tvorený dotyčnicami z vrcholu V_s . Presnejšie to budú spojnice bodu V_s s bodmi dotyku T a T' , ktoré získame ako priesečníky Thaletovej kružnice l nad priemerom V_1V_s s kružnicou k .



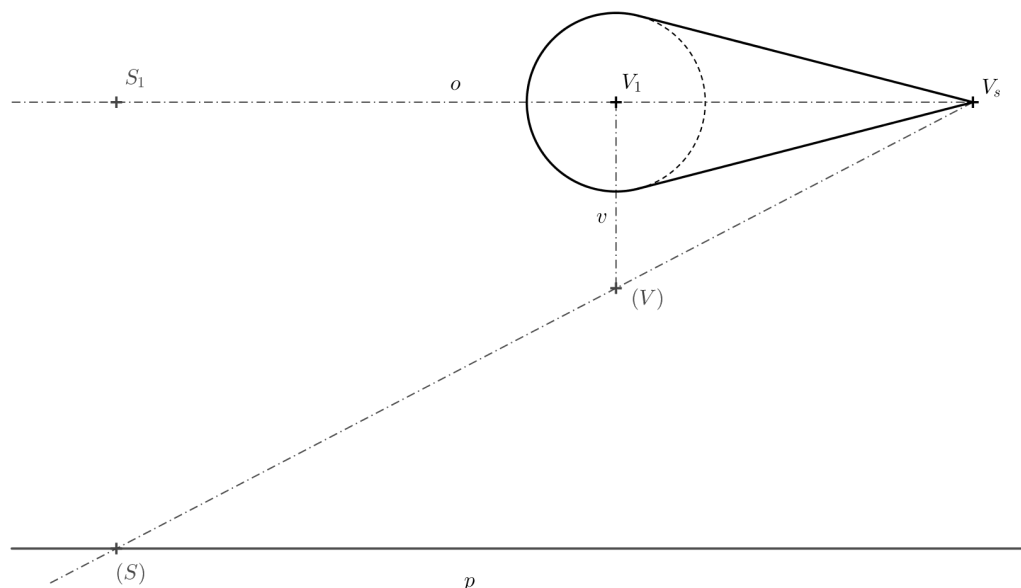
Obr. 7: Riešenie úlohy 2

Úloha 3. Pre riešenie predchádzajúcej úlohy určte polohu stredu S (pomocou S_1 a (S)), ak poznáme výšku v priestorového kužeľa a $d = |S_1S|$. Zadanie pozri nasledujúci obrázok, dĺžky v a d sú dané pomocou úsečiek.



Obr. 8: Zadaní úlohy 3

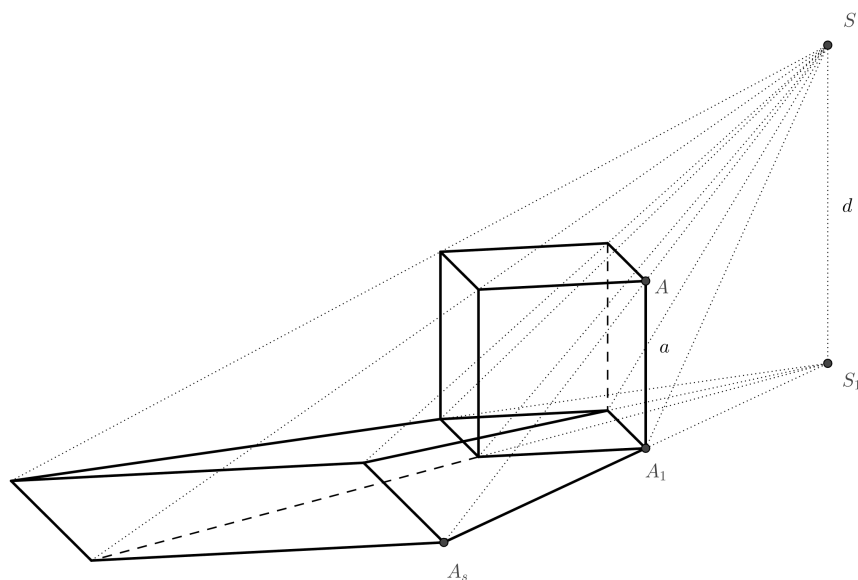
Riešenie. Bod S musí spĺňať dve podmienky. Jeho vzdialenosť od priemetne je rovná d a musí ležať na spojnici VV_s . Stred S aj bod V ležia v rovine kolmej na priemetňu. Priesečnica týchto dvoch rovín je priamka $o = V_1V_s$. Okolo tejto priamky môžeme vrchol V pootočiť o 90° do priemetne. Otočený obraz bodu V označíme (V) , musí ležať vo vzdialenosti v od bodu V_1 na kolmici na os o . Vo vzdialenosti d od osi $o = V_1V_s$ narysujeme priamku p . Bod (S) musí ležať na priesečníku priamky p a $(V)V_s$.



Obr. 9: Riešenie úlohy 3

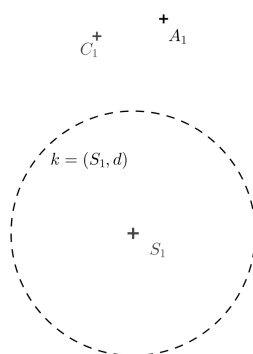
Hranol a valec

Pri anamorfnom zobrazení hranola a valca budeme využívať súmernosť. Prečo tomu tak je si vysvetlíme na príklade kocky na nasledujúcom obrázku. Medzi hornou podstavou kocky a jej priemetom je v priestore vzťah súmernosti so stredom S (plynie z podobnosti trojuholníkov). Pretože dolná podstava kocky je súčasne kolmým priemetom hornej podstavy do priemetne, funguje potom vzťah súmernosti medzi dolnou podstavou a stredovým priemetom hornej podstavy so stredom súmernosti S_1 .



Obr. 10: Anamorfóza kocky

Úloha 4. Určte anamorfózu kocky. Štvorec dolnej podstavy je daný protifaľnými vrcholmi A_1, C_1 . Ďalej je daná poloha bodu S_1 (kolmý priemet stredu premietania S), dĺžka d je zadaná polomerom kružnice k .

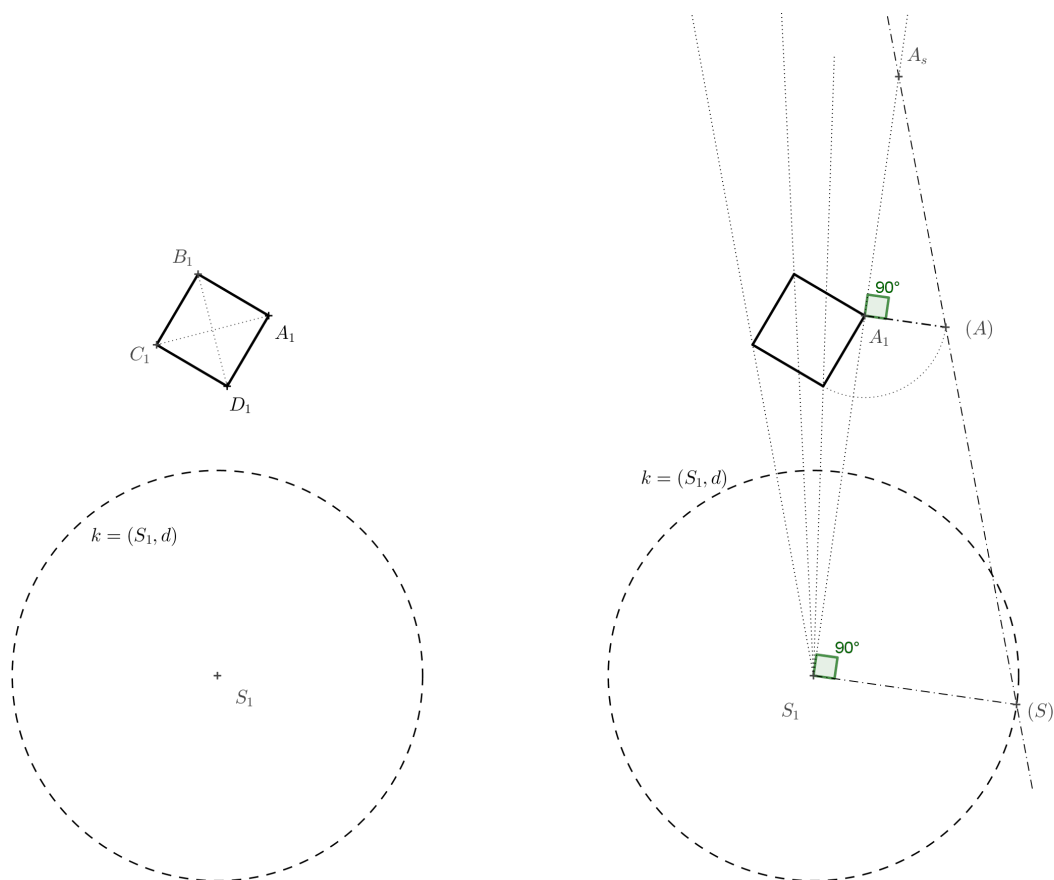


Obr. 11: Zadanie úlohy 4

Riešenie. Zostrojíme štvorec $A_1B_1C_1D_1$ s uhlopriečkou A_1C_1 . Na obrázku .. vidíme, že bod A_s je priesečník priamok AS a A_1S_1 . Poznáme dĺžky rovnobežných strán lichobežníka A_1S_1SA , takže môžeme

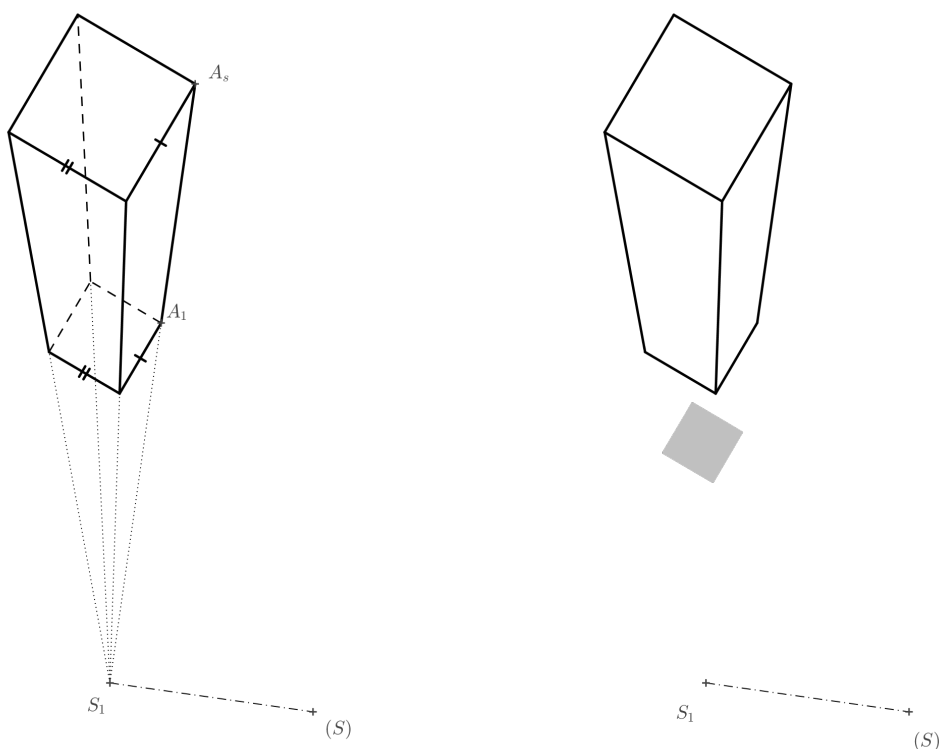
Results matter!

opäť vykonať jeho pootočenú okolo strany A_1S_1 o 90° do priemetne. Dĺžka $S_1(S) = d$ je daná polomerom kružnice k a dĺžka $A_1(A) = a$ je dĺžka strany štvorca $A_1B_1C_1D_1$. Bod A_s je priesečník priamky S_1A_1 a priamky $(S)(A)$.



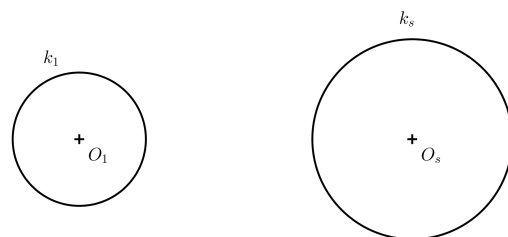
Obr. 12: Zobrazenie štvorca dolnej podstavy a určenie bodu A_s

Štvorec s vrcholom A_s potom dorysujeme pomocou súmernosti. Bočné hrany kocky zodpovedajú spojeniam vrcholov štvorcov, ktoré si zodpovedajú v súmernosti. Máme hotovo. Ak ale chceme podporiť ilúziu kocky, môžeme narysovať ešte štvorec, ktorý zodpovedá štvorcu $A_1B_1C_1D_1$ v súmernosti so stredom S a koeficientom $0 < k < 1$. Ak ho vyfarbíme šedou, určíme tým tieň kocky (pri smere osvetlenia zhora) a vytvoríme tým dojem, že kocka levituje v priestore.



Obr. 13: Riešenie úlohy 4 a jeho vylepšenie

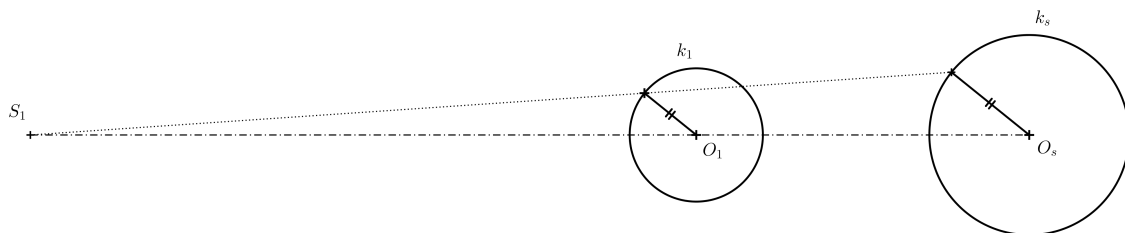
Úloha 5. Majme dané dve rôzne veľké kružnice, zadanie pozri nasledujúci obrázok. Určte stred ich súmernosti S_1 a ich spoločné dotyčnice tak, aby výsledný obrázok bol anamorfózou valca.



Obr. 14: Zadanie úlohy 5

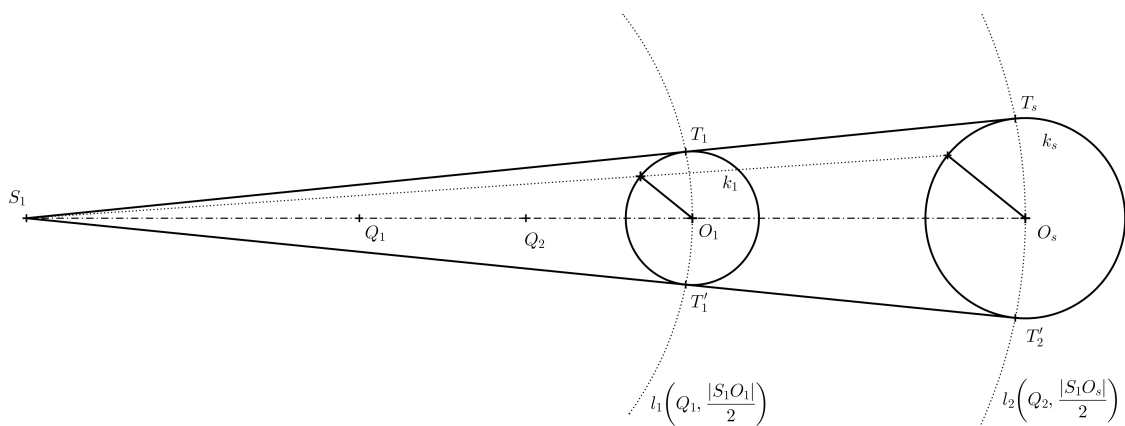
Results matter!

Riešenie. Každé dve nesústredné kružnice s rôznymi polomeri sú súmerné dvoma spôsobmi. Nás zaujíma ten spôsob, keď koeficient súmernosti je kladný. Najprv zostrojíme stred súmernosti (pozri nasledujúci obrázok).



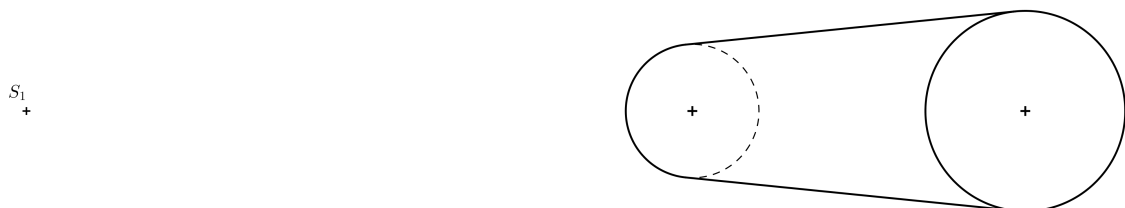
Obr. 15: Nájdenie stredú súmernosti

Body dotyku nájdeme na Thaletových kružniciach nad priermi S_1O_1 a S_1O_s . Až potom rysujeme dotyčnice (ak rysujeme pomocou pravítka a kružidla).



Obr. 16: Určenie spoločných dotyčníc (riešenie pre $k > 0$)

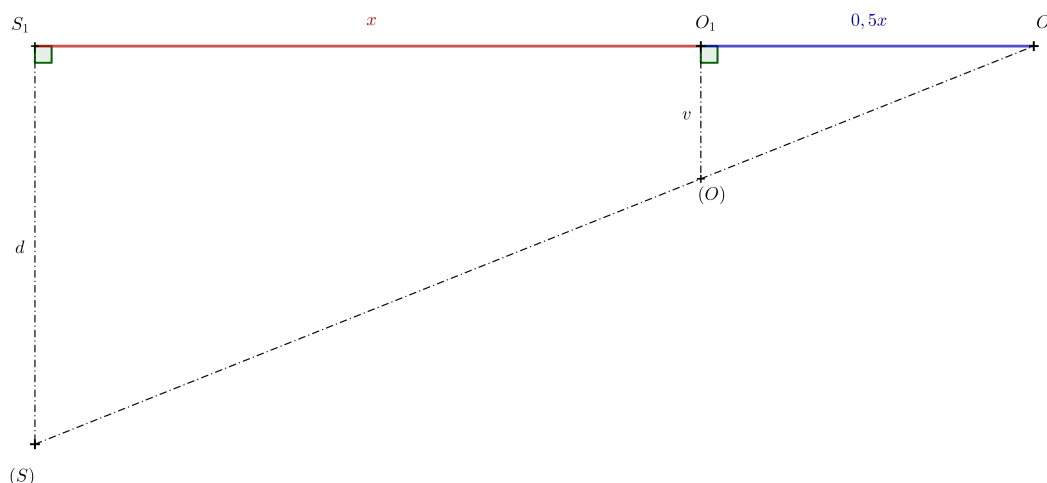
Výsledná anamorfóza valca je na nasledujúcom obrázku.



Obr. 17: Zobrazenie výsledku úlohy 5

Úloha 6. Koeficient súmernosti $H(S, k)$ v predchádzajúcom príklade, ktorá zobrazuje O_1 na O_s je $k = 1,5$. Aký musí byť pomer $d : v$, kde $d = |S_1S|$ a $v = |O_1O|$ (výška pomyselného valca v priestore), aby priestorová ilúzia fungovala?

Riešenie. Označme si $x = |S_1O_1|$. Vďaka koeficientu súmernosti potom vieme, že $|S_1O_s| = 1,5x$. Z toho plynie $|O_1O_s| = 0,5x$. Potom opäť využijeme podobnosť trojuholníkov $S_1O_s(S)$ a $O_1O_s(O)$ na nasledujúcom obrázku.



Obr. 18: Pomocný obrázok k úlohe 6

$$\frac{d}{v} = \frac{1,5x}{0,5x} = 3$$

Pomer $d : v$ musí byť rovný 3 : 1

Odkazy a literatúra

Literatúra

<https://en.wikipedia.org/wiki/Anamorphosis>

Zdroje obrázkov

- Velvyslanci https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hans_Holbein_the_Younger_-_The_Ambassadors_-_Google_Art_Project.jpg
- Lebka (detail obrazu Velvyslanci při pohledu ze správného místa) https://en.wikipedia.org/wiki/File:Holbein_Skull.jpg