

Krevní tlak

Keywords: goniometrie, goniometrické funkce, sinus, kosinus, aproximace, krevní tlak

Goniometrické funkce a periodické jevy

Základní goniometrické funkce sinus a kosinus se často používají k modelování světelných, zvukových a elektromagnetických vln. Lze je také použít k aproximaci ¹ dalších periodických jevů, jako je například příliv a odliv nebo krevní tlak.

Pochopení těchto funkcí (a jejich jednotlivých částí) nám umožňuje efektivně předpovídat a analyzovat periodické jevy a jejich vlastnosti. Můžeme například vypočítat výšku vln v oceánu, nebo čas přílivu. V následujícím textu se zaměříme na funkce aproximující krevní tlak.

Základní informace o krevním tlaku

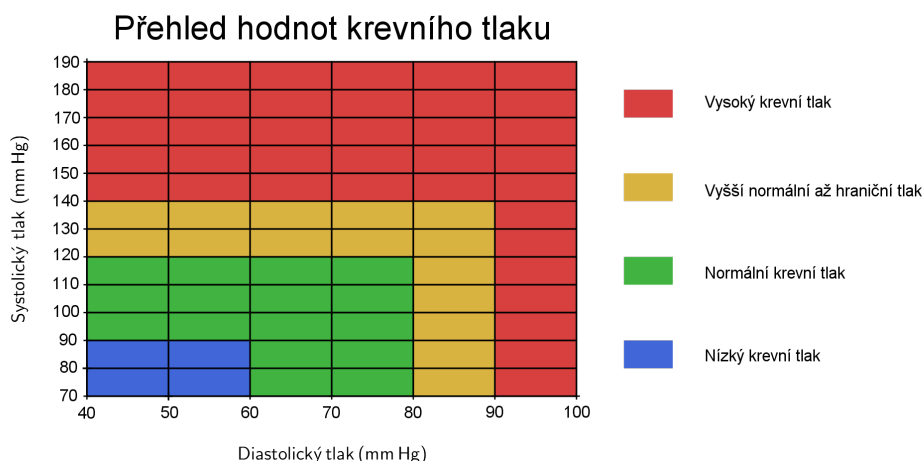
Srdce funguje jako pumpa, která pohání okysličenou krev do cév celého těla, aby mu dodalo potřebný kyslík a živiny. Krevní tlak je tlak, kterým působí krev na stěnu cévy, kterou protéká. Tento tlak je různý v různých částech krevního řečiště. Běžně se tlakem krve míní arteriální (tepenný) krevní tlak, tedy tlak krve ve velkých tepnách. Pokud je váš krevní tlak příliš vysoký, zatěžuje vaše tepny (a srdce), což může vést k infarktu myokardu či cévní mozkové příhodě.

Vysoký krevní tlak, odborně hypertenzi, obvykle necítíte ani nepozorujete. Nemá tendenci vyvolávat zjevné příznaky nebo symptomy. Jediný způsob, jak zjistit, jaký je váš krevní tlak, je nechat si ho změřit. První měřicí přístroj určoval krevní tlak podle výšky rtuťového sloupce, proto se jeho hodnota dodnes udává v milimetrech rtuti. Zapisuje se jako podíl dvou čísel. Pokud je vaše hodnota například 120/80 mm Hg, váš krevní tlak je takzvaně 120 na 80.

Vyšší číslo udává systolický krevní tlak. Jedná se o nejvyšší hodnotu, které krevní tlak dosáhne, když vaše srdce bije a vytlačuje krev do cévního systému. Nižší číslo se nazývá diastolický krevní tlak a je to naopak nejnižší úroveň, které tlak dosahuje ve chvíli když se srdeční sval mezi jednotlivými údery uvolní.

Níže uvedená tabulka krevního tlaku ukazuje rozmezí vysokého, nízkého a zdravého krevního tlaku.

¹Aproximace znamená přibližné, ale věrné vyjádření čísla nebo funkce, ale také fyzikálního zákona či přírodního jevu.



Obrázek 1: Tabulka krevního tlaku

Aproximace funkce krevního tlaku

Při stazích srdce se krevní tlak cyklicky zvyšuje a snižuje. Délka trvání jednoho srdečního tepu tedy odpovídá periodě funkce, která znázorňuje krevní tlak. Každá perioda funkce měření krevního tlaku odpovídá jednomu srdečnímu tepu (udává, jak dlouho trvá, než se dokončí cyklus srdečního tepu). Navíc víme, že lokálním maximem funkce bude hodnota systolického krevního tlaku a lokálním minimem hodnota diastolického tlaku. Funkci krevního tlaku můžeme přibližně nahradit funkcí sinus nebo kosinus. Připomeňme, že obecný předpis funkce sinus je

$$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d,$$

kde a představuje amplitudu, která určuje, jak vysoko nebo nízko se sinusoida pohybuje od své střední polohy. Hodnota b ovlivňuje periodu funkce (platí že perioda je rovna $\frac{2\pi}{|b|}$). Člen c určuje posun ve směru osy x a d posun ve směru osy y .

Úloha 1. Porovnejte následující dvě funkce

$$P_1(t) = 25 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) + 105, \quad P_2(t) = 30 \cdot \cos(2\pi t) + 125,$$

které aproximují krevní tlak dvou různých lidí. Tyto funkce závisí na proměnné t , která představuje čas v sekundách. Pro každou funkci najděte periodu funkce (délku jednoho srdečního tepu) a určete jejich tepovou frekvenci (počet úderů srdce za minutu).

Řešení. Periodu p_1 funkce P_1 můžeme vypočítat jako

$$p_1 = \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{3}} = \frac{6}{7} \text{ sekundy.}$$

Jelikož doba trvání jednoho srdečního tepu je $\frac{6}{7}$ sekundy, tepová frekvence f_1 bude

$$f_1 = \frac{60}{\frac{6}{7}} = 70 \text{ úderů za minutu.}$$

Obdobně pro funkci P_2 bude perioda

$$p_2 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ sekunda.}$$

Tepová frekvence je tedy $f_2 = 60$ úderů za minutu.

Úloha 2. Nakreslete grafy funkcí ze zadání první úlohy. Pokud máte možnost, použijte k vykreslení grafů vhodný software (například program GeoGebra). Pomocí tabulky krevního tlaku určete, jak jsou na tom příslušní lidé s krevním tlakem.

Řešení. Pro vykreslení grafu funkce bude osa x představovat čas t v sekundách. Osa y bude představovat krevní tlak P v milimetrech rtuti. Jednotky na osách zvolíme tak, aby graf vypadal přehledně. Vhodná volba je například, že jedné jednotce na ose x odpovídá sto jednotek na ose y . V řešení na obrázku je zvolen poměr jednotek na osách 1 : 125. Funkce

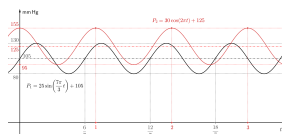
$$P_1 = 25 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) + 105$$

osciluje kolem hodnoty 105, amplituda je rovna 25. Lokální maxima funkce budou mít tedy funkční hodnoty $105 + 25 = 130$ (systolický tlak). Lokální minima funkce budou mít funkční hodnoty $105 - 25 = 80$ (diastolický tlak).

Funkce

$$P_2 = 30 \cdot \cos(2\pi t) + 125$$

osciluje kolem hodnoty 125, amplituda je rovna 30. Lokální maxima funkce budou mít tedy funkční hodnoty $125 + 30 = 155$ (systolický tlak). Lokální minima funkce budou mít funkční hodnoty $125 - 30 = 95$ (diastolický tlak).



Obrázek 2: Grafy funkcí z úlohy 1

Funkce P_1 je přibližně funkcí tlaku 130 na 80, podle tabulky z úvodu odpovídá mezním hodnotám mezi normálním a vysokým tlakem (v některých zemích se bere jako normální tlak, v některých zemích je to už spodní hranice vysokého krevního tlaku). Funkce P_2 odpovídá tlaku 155 na 95, tento tlak je vysoký.

Vizualizace takových grafů pomáhá porozumět změnám krevního tlaku a pochopit další periodické jevy, což je nezbytné jak v matematických studiích, tak v praktických aplikacích.

Vysoký krevní tlak je nebezpečný stav a hlavní rizikový faktor srdečních onemocnění a mrtvice. Zdravý životní styl, například strava s vysokým obsahem ovoce a zeleniny a nízkým obsahem sodíku a také fyzická aktivita, může pomoci vysokému krevnímu tlaku předcházet. Vysoká hodnota z jediného měření nemusí nutně znamenat, že máte vysoký krevní tlak, protože na krevní tlak může mít během dne vliv mnoho faktorů, například teplota, doba posledního jídla nebo stres.

Díky tomu, že jsme si funkce P_1 a P_2 vykreslili, vidíme na první pohled, jaké jsou mezi nimi rozdíly. Někdy mohou mít ale dvě funkce dané na první pohled různými předpisy ten samý graf. Poznali byste například na první pohled, že tomu je tak u následujících dvou funkcí?

$$y = \sin \frac{3x}{5}, \quad y = \cos \left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{2} \right)$$

Tyto funkce mají stejný graf a velikost jejich periody je

$$\frac{2\pi}{\frac{3}{5}} = \frac{10\pi}{3}.$$

Ale pozor, graf funkce $y = \cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{2}\right)$ není oproti grafu funkce $y = \cos\frac{3x}{5}$ posunutý ve směru osy x o $\frac{\pi}{2}$, jak by se z předpisu funkce na první pohled mohlo zdát, ale o čtvrtinu periody této funkce. To můžeme vidět, pokud si předpis vhodně upravíme:

$$y = \cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3}{5}\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

Pro porovnání dvou takovýchto funkcí by tedy bylo lepší, kdybychom mohli jednu převést na druhou. Tímto se právě bude zabývat následující úloha.

Úloha 3. Vyjádřete funkci P_1 z Úlohy 1. pomocí funkce kosinus místo funkce sinus.

Řešení. Pro funkce $\sin x$ a $\cos x$ v základním tvaru platí

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

kde $\frac{\pi}{2}$ je čtvrtina periody. Perioda funkce P_1 je $p_1 = \frac{6}{7}$, čtvrtina periody je

$$\frac{p_1}{4} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}.$$

Platí tedy

$$\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\left(t - \frac{3}{14}\right)\right)$$

a funkci P_1 můžeme vyjádřit následovně

$$P_1 = 25 \cdot \cos\left(\frac{7\pi}{3}t - \frac{1}{2}\pi\right) + 105.$$

V předchozí úloze bychom mohli funkce také zaměnit a vyjadřovat funkci P_2 pomocí funkce sinus.

Úloha 4. Najděte předpis funkce, která aproximuje funkci krevního tlaku zdravého člověka v klidu. Jeho srdeční frekvence je 50 tepů za minutu. Maximální krevní tlak je 110 mm Hg a minimální 70 mm Hg.

Řešení. K aproximaci funkce krevního tlaku použijeme například funkci sinus (řešení pro funkci kosinus by bylo obdobné).

Amplituda funkce je $\frac{110-70}{2} = 20$ a funkce osciluje kolem hodnoty $\frac{110+70}{2} = 90$.

Perioda funkce je

$$p = \frac{60}{50} = \frac{6}{5},$$

tj. jeden srdeční tep trvá 1,2 sekundy. Ze vztahu

$$p = \frac{2\pi}{b} = 1,2$$

pro periodu p funkce dostáváme $b = \frac{5}{3}\pi$.

Hodnotu c můžeme zvolit libovolně, nejjednodušší je zvolit $c = 0$. Dosazením výše uvedených hodnot do obecného tvaru funkce dostáváme

$$P(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) + 90.$$

Tato funkce přibližně modeluje krevní tlak osoby se zadanými hodnotami jako funkci času (v sekundách).

Auskultační technika měření krevního tlaku

Na závěr ještě uvedme, jak se v realitě tlak opravdu měří. Jedna z přesných metod je tzv. auskultační technika. Při této metodě se používá tonometr, skládající se z gumové manžety, nafukovacího vaku a manometru (mechanické měřidlo tlaku), a fonendoskop.

Gumovou manžetu tonometru se nasadí zhruba na polovinu paže. Tlak v manžetě se zvýší tak, aby převyšoval tlak v tepně. Tím se z manžety stane uměle vytvořená překážka krevnímu průtoku. Postupným pomalým snižováním tlaku v manžetě dojde v určitém okamžiku k obnovení průtoku krve.

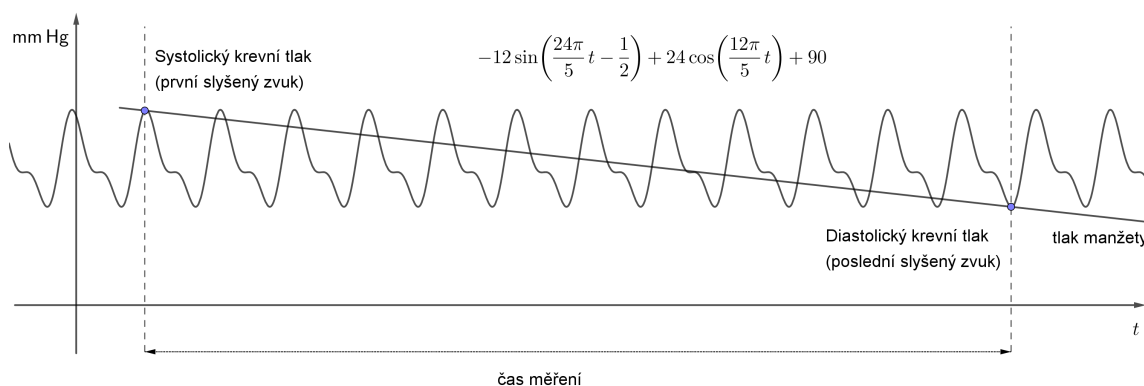
Tlak v manžetě však na počátku způsobí deformaci tepny, díky níž je proudění pronikající krve turbulentní. Hodnota tlaku, při níž začínají být ve fonendoskopu slyšitelné srdeční ozvy, odpovídá hodnotě systolického krevního tlaku.

Ozvy jsou slyšitelné do té doby, dokud tlak v manžetě postačuje k deformaci tepny a tím k udržení turbulentního proudění. Jakmile tlak v manžetě poklesne natolik, že již nestačí tepnu deformovat, obnoví se původní proudění krve a ozvy přestanou být slyšitelné. Tlak při poslední slyšitelné ozvě odpovídá hodnotě diastolického krevního tlaku.

Zpřesnění

Zbývá dodat, že realističtější vyjádření funkce krevního tlaku je náročnější a vyžaduje součty goniometrických funkcí s různými periodami.

Na následujícím obrázku vidíme konkrétní příklad takového součtu a příslušný graf. Současně je na obrázku znázorněno měření krevního tlaku. Rychlost vypouštění manžety je přibližně konstantní. Tlak v manžetě tedy klesá konstantní rychlostí (opět přibližně) a na obrázku je znázorněn přímkou.



Obrázek 3: Příklad součtu sinu a kosinu s různými periodami

Results matter!

Zpřesňování průběhu funkce krevního tlaku pomocí součtů sinů a kosinů už souvisí s tzv. Fourierovou větou, která říká, že spojitou periodickou funkci lze vyjádřit jako součet nekonečného počtu funkcí sinus a kosinus, přičemž každý z těchto členů má určitou amplitudu a periodu.

Tento výsledek získal v roce 1822 francouzský matematik Joseph Fourier jako součást řešení rovnice vedení tepla. Jedná se o klíčový koncept pro analýzu a pochopení jakýchkoli periodických jevů. Fourierova věta je základem zpracování signálů.

Literatura

- <https://www.vaia.com/en-us/textbooks/math/calculus-an-applied-approach-8-edition/chapter-8/problem-72-health-the-function-p100-20-cos-5-pi-t-3-approxim/>
- <https://www.vaia.com/en-us/textbooks/math/precalculus-9-edition/chapter-4/problem-90-the-function-p100-20-cos-frac{5}{2}\pi-t-3-approximates/#short-answer>
- <https://www.bloodpressureuk.org/your-blood-pressure/understanding-your-blood-pressure/what-do-the-numbers-mean/>