

Vektory

Keywords: analytická geometria, vektory, skalárny súčin

Vektory predstavujú dôležitý pojem nielen v matematike, ale aj vo fyzike či informatike. V matematike sa nimi zaoberá lineárna algebra.

Normálne možno vektor definovať ako prvok vektorového priestoru, čo je abstraktná algebraická štruktúra so zavedenými operáciami sčítania vektorov a násobenia vektora skalárom. Typickým príkladom takéhoto priestoru je množina všetkých usporiadaných n -tíc reálnych čísel, teda napríklad dvojíc alebo trojíc, s príslušnými operáciami.

Na strednej škole sa však vektor často predstavuje názorne ako množina všetkých orientovaných úsečiek s rovnakou veľkosťou (dĺžkou) a rovnakým smerom.

Vo fyzike majú vektory zásadný význam pri popise veľkosti a smeru rôznych veličín, napríklad rýchlosti, zrýchlenia, síl pôsobiacich na teleso alebo elektromagnetických polí.

V informatike sa pod pojmom vektor spravidla rozumie usporiadaný zoznam prvkov (nielen čísel), pričom tento dátový typ sa používa ako efektívny spôsob ukladania a spracovávania údajov, napríklad v aplikáciách strojového učenia.

Existuje však odvetvie informatiky, kde sa vektory uplatňujú v rovnakom význame, ako ho poznáme zo stredoškolskej matematiky alebo fyziky – je ním prostredie počítačových hier.

Schopnosť pracovať s vektormi patrí k najzákladnejším predpokladom programátora hier.

V závislosti od toho, či ide o 2D alebo 3D hru, majú vektory dve alebo tri súradnice. Uplatňujú sa pri reprezentácii geometrických vlastností objektov v hernom svete.

Zjednodušene sa preto obmedzíme na dvojrozmerný priestor, teda rovinu, a budeme pracovať v kartézskej súradnicovej sústave.

Poznámka: Takých základných stavebných kameňov je potrebných samozrejme oveľa viac. Okrem príslušného programovacieho nástroja je potrebné poznať aj matice transformácií, ako je posunutie, otočenie a podobne.

V nasledujúcich cvičeniach sa však sústredíme výhradne na operácie s vektormi.

Body a smerové vektory

V nasledujúcich príkladoch budeme rozlišovať zadanie bodov (v hranatých zátvorkách) a vektorov (v okrúhlych zátvorkách). Súčasne však budeme mať na pamäti, že bod $A = [a_1; a_2]$ môžeme interpretovať aj ako koncový bod vektora $\vec{a} = (a_1; a_2)$, ktorý má za počiatočný bod počiatok súradnicovej sústavy.

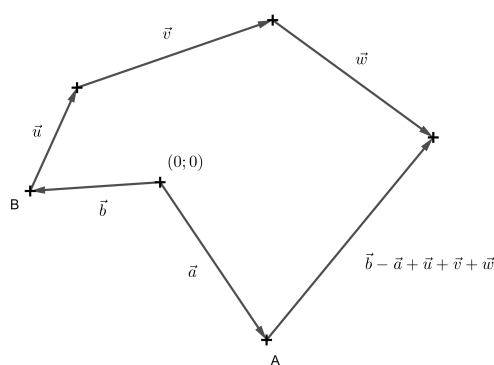
Bod je teda určený svojimi súradnicami, avšak na rozdiel od vektora ho neurčuje veľkosť (dĺžka) a smer. Bod $[0, 0]$ alebo vektor $(0, 0)$ budeme chápať ako stred herného sveta.

Častým prípadom využitia vektorov je výpočet takého vektora, ktorý vyjadruje vzťah jedného objektu voči druhému. Uvažujme body $A = [a_1; a_2]$ a $B = [b_1; b_2]$. Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ obvykle nazývame smerový vektor.

Ak budú body A a B v hre reprezentovať postavy, tak vektor $\overrightarrow{AB}$ určuje smer a jeho veľkosť potom vzdialenosť, ktorú postava A musí prejsť, aby sa dostala k postave B .

Úloha 1. V dvojrozmernej hre máme programátora, ktorý ovláda postavu A a hráča, ktorý ovláda postavu B . Na začiatku sa obe postavy nachádzajú na rôznych miestach, pričom sú pre jednoduchosť reprezentované bodmi A a B . Postava B sa následne pohybuje po dráhe určenou postupným posunutím v smeroch vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Úlohou je vyjadriť vektor, ktorý musí programátor určiť na to, aby postava A mohla zasiahnuť postavu B .

Riešenie. Je zrejmé, že postava B prešla celkovú trasu $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Postavy A a B sa však na začiatku nachádzali na rôznych miestach. Preto je potrebné určiť vektor s počiatočným bodom v bode A a koncovým bodom v bode B , teda smerový vektor $\overrightarrow{AB}$. Vieme, že bod A môžeme chápať ako koncový bod vektora $\vec{a}$ a bod B ako koncový bod vektora $\vec{b}$. Potom platí: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ (Keďže bod a vektor majú rovnaké súradnice, často sa používa aj zápis $\overrightarrow{AB} = B - A$). Hľadaný vektor, ktorý určuje výstrel postavy A na postavu B , je teda: $\vec{b} - \vec{a} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.



Obr. 1: Obrázek k řešení příkladu 1

Pri každej postave v hernom svete sa využíva aj vektor vo význame usporiadaného zoznamu položiek. Jednou z položiek môže byť napríklad meno postavy, jej úloha či poloha. Ďalšou vlastnosťou každej postavy v hernom svete je smer, ktorým je natočená. Na určenie tohto smeru sa používa takzvaný normalizovaný smerový vektor, teda smerový vektor s dĺžkou 1.

Normalizované smerové vektory sa zároveň využívajú na uchovávanie informácie o tom, akým smerom sa nachádzajú ostatné postavy alebo objekty. *Poznámka:* Dôvod, prečo sa v hernom svete používajú práve normalizované verzie smerových vektorov, si vysvetlíme neskôr.

Úloha 2. Majme postavy $A = [-5; 2]$, $B = [1; -2]$, $C = [4; -1]$. Určite normalizované smerové vektory postáv A a B smerom k ostatným postavám. Nakreslite zodpovedajúci obrázok.

Riešenie. Pre smerový vektor $\overrightarrow{AB}$ platí $\overrightarrow{AB} = (1 - (-5); -2 - 2) = (6; -4)$. Ak ho chceme normalizovať, stačí ho vydeliť jeho dĺžkou $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{52}$. Normalizovaný vektor k vektoru $\overrightarrow{AB}$ označíme $\widehat{AB}$ a platí

$$\widehat{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(6; -4)}{\sqrt{52}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}} \right).$$

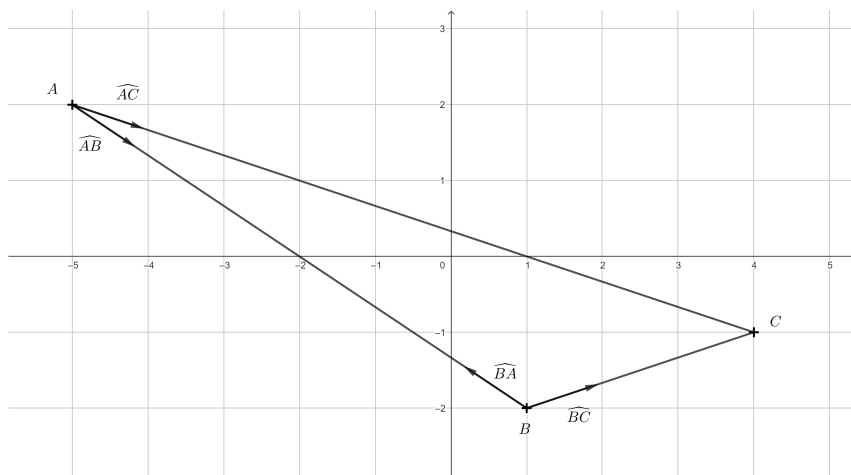
Podobne:

$$\widehat{AC} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{(9; -3)}{\sqrt{90}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}} \right),$$

$$\widehat{BC} = \frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \frac{(3; 1)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}} \right),$$

$$\widehat{BA} = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = \frac{(-6; 4)}{\sqrt{52}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}} \right).$$

Vektor $\widehat{BA}$ sme nemuseli počítať, keďže má rovnakú veľkosť ako $\widehat{AB}$ ale opačný smer. Súradnice takýchto vektorov sa teda líšia iba znamienkom.



Obr. 2: Obrázok k riešeniu príkladu 2

Úloha 3. Majme polohu postavy $A = [a_1; a_2]$ a postavy $B = [b_1; b_2]$ ktoré sa nachádzajú na rôznych miestach. Určte: a) normalizovaný smerový vektor $\widehat{BA}$, b) kde sa bude postava A nachádzať potom, čo prejde tri jednotkové dĺžky smerom k postave A ?

Riešenie. a) To, čo sme počítali v predchádzajúcom príklade s konkrétnymi súradnicami, teraz zapíšeme všeobecne. Teda

$$\widehat{BA} = \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|} = \frac{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}.$$

b) Z predchádzajúceho máme vypočítaný smerový vektor jednotkovej dĺžky. Teraz stačí vynásobiť ho tromi a pripočítať k polohe postavy B . Dostaneme

$$B + 3 \cdot \widehat{BA} = [b_1; b_2] + 3 \frac{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}.$$

Skalárny súčin a jeho použitie

Výsledkom skalárneho súčinu dvoch vektorov je skalár, teda reálne číslo. V programovaní hier má dôležité miesto skalárny súčin normalizovaných vektorov.

Úloha 4. Určte skalárne súčiny normalizovaných smerových vektorov z riešenia Úlohy 2.

Riešenie.

$$\widehat{AB} \cdot \widehat{AC} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}} \right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = \frac{9}{\sqrt{130}} + \frac{2}{\sqrt{130}} = \frac{11}{\sqrt{130}} \doteq 0,96$$

$$\widehat{BA} \cdot \widehat{BC} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = -\frac{9}{\sqrt{130}} + \frac{2}{\sqrt{130}} = -\frac{7}{\sqrt{130}} \doteq -0,054$$

Skalárny súčin dvoch normalizovaných vektorov je veľmi užitočný, pretože určuje, do akej miery dva vektory smerujú rovnakým alebo podobným smerom! Hodnota skalárneho súčinu v tomto prípade môže nadobúdať hodnoty v intervale -1 až 1 , pričom 1 znamená, že oba vektory smerujú presne rovnakým smerom, a -1 , že smerujú opačným smerom a hodnota blízka 0 vyjadruje, že zvierajú uhol blízky pravému uhlu. Dôvodom tohto intervalu -1 až 1 je, že ide o funkčné hodnoty funkcie kosínus. Pre skalárny súčin dvoch vektorov $\vec{p}$, $\vec{q}$, totiž platí vzťah

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \alpha,$$

kde α je uhol, ktorý vektory $\vec{p}$ a $\vec{q}$ zvierajú.

Úloha 5. Pozorovateľ v počiatku súradnicovej sústavy sa pozerá na objekt $A = [3; 1]$. Určte uhol α o ktorý sa musí otočiť, aby smer jeho pohľadu mieril priamo na objekt $B = [1; 2]$.

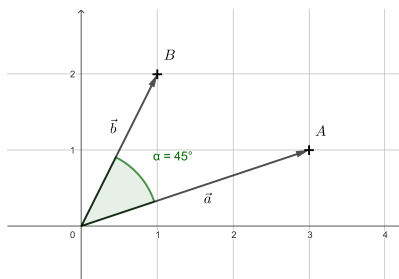
Riešenie. Body A a B budeme opäť brať ako koncové body vektorov $a = (3; 1)$ a $b = (1; 2)$. Zo vzťahu, ktorý platí pre skalárny súčin dvoch vektorov, vyjadríme $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Po dosadení dostávame:

$$\cos \alpha = \frac{(3; 1) \cdot (1; 2)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{25}{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vieme, že $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ je základná hodnota goniometrickej funkcie, teda $\alpha = 45^\circ$, resp. hodnotu uhla α môžeme vypočítať aj ako $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pozorovateľ sa teda musí otočiť o uhol 45° .



Obr. 3: Obrázok k riešeniu príkladu 5

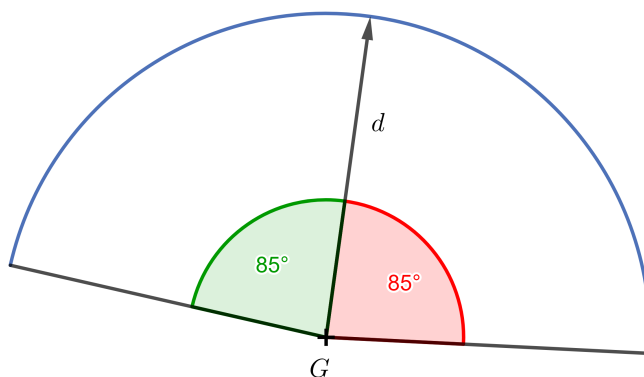
Ak by boli v zadaní úlohy uvedené normalizované smerové vektory, ich skalárny súčin by sa rovnal priamo $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

Toto je dôvod, prečo sa smery pohľadov postáv a smerové vektory medzi postavami zapisujú v zoznamoch položiek v normalizovanom tvare. Skalárny súčin môžeme s výhodou použiť aj na riešenie nasledujúceho problému. Predstavme si, že vytvárame hru, v ktorej sa hráč snaží skryť pred strážami. Bude nás teda zaujímať, či strážnik vidí alebo nevidí jednotlivých hráčov. Pre väčšiu realistikosť chceme, aby mal strážnik zorné pole, v ktorom danú postavu vidí. U človeka sa udáva veľkosť zorného uhla pre videnie oboma očami približne 180° . To by bolo pre nášho strážnika priveľa, takže povedzme, že chceme, aby jeho zorný uhol bol napríklad 170° .

Úloha 6. Zorný uhol strážnika G je 170° , Aké hodnoty budú nadobúdať skalárne súčiny medzi jeho smerom pohľadu $\vec{d}$ a normalizovanými smerovými vektormi k objektom, ktoré strážnik vidí?

Riešenie. Od smeru pohľadu strážnika k hraniciam zorného poľa (smerom doprava aj doľava) máme 85° . Stačí teda vypočítať $\cos 85^\circ \approx 0,087$. Skalárne súčiny medzi smerom pohľadu strážnika a normalizovanými smerovými vektormi k objektom, ktoré vidí, budú nadobúdať hodnoty medzi 0,087 a 1.



Obr. 4: Obrázok k riešeniu príkladu 6

Results matter!

Do zoznamu položiek prislúchajúcich strážnikovi teda k smeru pohľadu pridáme interval, ktorý bude určovať jeho zorné pole. Pomocou neho potom môžeme kontrolovať, či strážnik hráča vidí alebo nevidí. Pre jednoduchosť predchádzajúci výsledok zaokrúhlime na jedno desatinné miesto a zorné pole strážnika teda obmedzíme hodnotou 0, 1.

Úloha 7. Určte, či strážnik, umiestnený v počiatku súradnicovej sústavy, vidí hráča $A = [3; -2]$, ak smer pohľadu strážnika je $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ a hranica pre obmedzenie zorného poľa je daná hodnotou 0, 1.

Riešenie. Smer pohľadu strážnika je už normalizovaný vektor. Stačí teda znormalizovať smerový vektor od strážnika k hráčovi A . Keďže strážnik je v počiatku súradnicovej sústavy, stačí normalizovať vektor $\vec{a} = (3; -2)$. Platí

$$\hat{a} = \frac{(3; -2)}{3^2 + (-2)^2} = \frac{(3; -2)}{15} = \left(\frac{3}{15}; \frac{-2}{15}\right).$$

Potom už môžeme vypočítať príslušný skalárny súčin týchto normalizovaných vektorov, teda:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{15}}; \frac{-2}{\sqrt{15}}\right) = \frac{3}{\sqrt{75}} - \frac{4}{\sqrt{75}} = -\frac{1}{\sqrt{75}} \doteq -0,12.$$

Výsledok nie je v rozmedzí od 0, 1 do 1, strážnik teda hráča A nevidí. Z výsledku je navyše jasné, že medzi vektormi je väčší ako pravý uhol. Môžete sa zamyslieť, v čom sa situácia z predchádzajúceho príkladu zmení, ak strážnik nie je v počiatku súradnicovej sústavy.