

Wektory

Keywords: geometria analityczna, wektory, iloczyn skalarny

Wektory są ważne nie tylko w matematyce, ale także w fizyce i informatyce. W matematyce są one badane w ramach gałęzi zwanej algebrą liniową.

Wektor jest zwykle definiowany jako element abstrakcyjnej struktury matematycznej zwanej przestrzenią wektorową. Typowym przykładem takiej przestrzeni jest zbiór wszystkich uporządkowanych n -krotności liczb rzeczywistych (na przykład par lub trójek), wraz z regułami ich dodawania i mnożenia przez liczbę. W matematyce w szkole średniej, wektory są często przedstawiane jako zbiór skierowanych odcinków linii, które mają tę samą wielkość i kierunek.

W fizyce wektory są używane do opisywania takich wielkości jak prędkość i przyspieszenie poruszającego się obiektu, działające na niego siły lub pola elektromagnetyczne. W informatyce wektor jest często rozumiany po prostu jako uporządkowana lista elementów (niekoniecznie liczb). Wektory zapewniają efektywny sposób organizowania i przechowywania danych, na przykład w aplikacjach uczenia maszynowego.

Istnieje jednak również dziedzina informatyki, w której wektory są używane w taki sam sposób, w jaki są definiowane w matematyce lub fizyce w szkole średniej. Obszarem tym są gry komputerowe. W rzeczywistości, opanowanie operacji wektorowych jest jednym z podstawowych elementów niezbędnych do zostania programistą gier.

W zależności od tego, czy tworzysz grę 2D czy 3D, wektory mają dwie lub trzy współrzędne i są zwykle używane do reprezentowania geometrycznych właściwości obiektów w świecie gry. Dla uproszczenia będziemy pracować tylko w dwóch wymiarach, to znaczy na płaszczyźnie przy użyciu kartezjańskiego układu współrzędnych.

Uwaga: Oczywiście zrozumienie wektorów jest tylko jednym z wielu podstawowych elementów. Oprócz odpowiednich narzędzi programistycznych, należy również zrozumieć macierze transformacji, takie jak translacje, obroty i tak dalej. W poniższych zadaniach skupimy się tylko na operacjach wektorowych.

Punkty i kierunek wektora

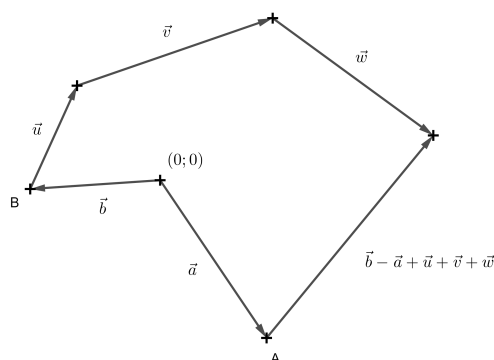
W poniższych przykładach będziemy rozróżniać punkty (zapisane w nawiasach kwadratowych) i wektory (zapisane w nawiasach okrągłych). Jednocześnie należy pamiętać, że punkt $A = [a_1; a_2]$ może być również interpretowany jako punkt końcowy wektora $\vec{a} = (a_1; a_2)$, którego punktem początkowym jest początek układu współrzędnych.

Punkt ma współrzędne, ale w przeciwieństwie do wektora, nie jest zdefiniowany przez wielkość i kierunek. Punkt $[0, 0]$ (lub wektor $(0, 0)$) będzie służył jako środek świata gry.

Powszechnym zastosowaniem wektorów jest znalezienie wektora opisującego relację między dwoma obiektami. Rozważmy prosty przykład z dwoma punktami $A = [a_1; a_2]$ i $B = [b_1; b_2]$. Wektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ jest zwykle nazywany wektorem kierunku. Jeśli punkty A i B reprezentują postacie w grze, to wektor $\overrightarrow{AB}$ wskazuje kierunek od jednej postaci do drugiej, a jego wielkość reprezentuje odległość, jaką musiałby pokonać znak A , aby dotrzeć do znaku B .

Zadanie 1. W grze 2D programista steruje postacią A , a gracz postacią B . Postacie zaczynają w różnych miejscach, reprezentowanych przez punkty A i B . Postać B porusza się po ścieżce złożonej z wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Wyraż wektor, który programista musi określić, aby postać A strzeliła do postaci B .

Rozwiązanie. Jest oczywiste, że znak B poruszył się po ścieżce $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Jednak znaki A i B rozpoczęły się na różnych pozycjach. Nadal musimy więc określić wektor, który zaczyna się w punkcie A i kończy w punkcie B - czyli wektor kierunku $\overrightarrow{AB}$. We know that point A can be understood as the endpoint of the vector $\vec{a}$, and point B as the endpoint of the vector $\vec{b}$. Wtedy wektor $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ (ponieważ punkty i odpowiadające im wektory mają te same współrzędne, notacja $\overrightarrow{AB} = B - A$ jest również powszechnie używana). Dlatego wektor potrzebny do tego, by postać A strzeliła do postaci B wynosi $\vec{b} - \vec{a} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.



Rysunek 1: Rysunek do zadania 1

Każda postać w świecie gry jest również powiązana z wektorem w sensie listy elementów - takich jak imię, rola i pozycja postaci. Kolejną ważną właściwością każdej postaci jest kierunek, w którym jest zwrócona. Kierunek ten jest reprezentowany przez tak zwany znormalizowany wektor kierunku, który jest wektorem kierunku o wielkości 1.

Znormalizowane wektory kierunku są również używane do przechowywania informacji o kierunkach, w których znajdują się inne postacie lub obiekty.

Uwaga: Powód, dla którego znormalizowane wersje wektorów kierunku są używane w światach gier, zostanie wyjaśniony później.

Zadanie 2. Niech znakami będą punkty $A = [-5; 2]$, $B = [1; -2]$ i $C = [4; -1]$. Wyznacz znormalizowane wektory kierunku od znaków A i B skierowane w stronę innych znaków. Narysuj odpowiedni diagram.

Rozwiązanie. Dla wektora o kierunku $\overrightarrow{AB}$ mamy: $\overrightarrow{AB} = (1 - (-5); -2 - 2) = (6; -4)$. Aby znormalizować ten wektor, po prostu dzielimy go przez jego wielkość: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{52}$. Znormalizowany wektor odpowiadający $\overrightarrow{AB}$ jest oznaczany przez $\widehat{AB}$ i otrzymujemy:

$$\widehat{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(6; -4)}{\sqrt{52}} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}} \right).$$

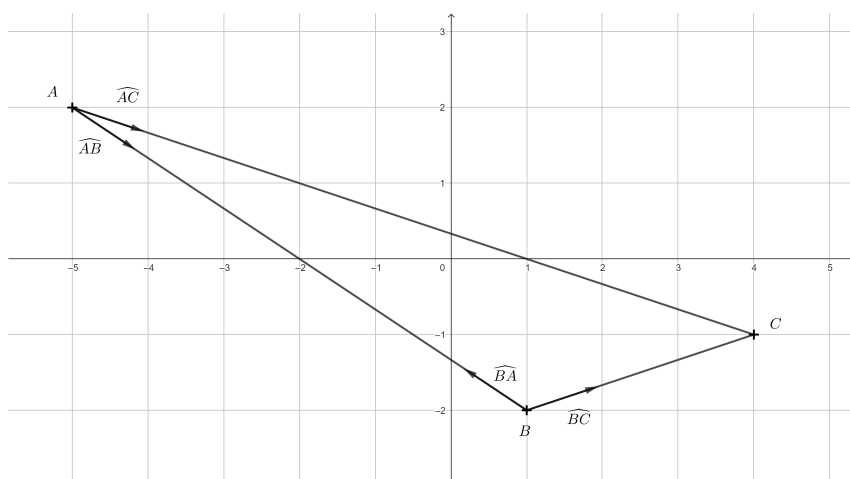
Podobnie

$$\widehat{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(9; -3)}{\sqrt{90}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}} \right),$$

$$\widehat{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{(3; 1)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}} \right),$$

$$\widehat{BA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} = \frac{(-6; 4)}{\sqrt{52}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}} \right).$$

Nie było potrzeby obliczania wektora $\widehat{BA}$, ponieważ ma on taką samą wielkość jak $\widehat{AB}$, ale jest skierowany w przeciwnym kierunku. Współrzędne takich wektorów różnią się tylko znakiem.



Rysunek 2: Rysunek do zadania 2

Zadanie 3. Dane są pozycje znaków $A = [a_1; a_2]$ i $B = [b_1; b_2]$, przy czym znaki te stoją w różnych miejscach. Wyznaczyć:

- znormalizowany wektor kierunku $\widehat{BA}$,
- gdzie znajdzie się znak B po przejściu trzech jednostek długości w kierunku znaku A ?

Rozwiązanie. a) To, co obliczyliśmy w poprzednim przykładzie przy użyciu konkretnych współrzędnych, można teraz zapisać w formie ogólnej. To znaczy,

$$\widehat{BA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} = \frac{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}.$$

- Z poprzedniego kroku mamy już wektor kierunku o jednostkowej długości. Teraz po prostu mnożymy go przez 3 i dodajemy do pozycji znaku B . Otrzymujemy:

$$B + 3 \cdot \widehat{BA} = [b_1; b_2] + 3 \frac{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}}.$$

Iloczyn skalarny i jego zastosowania

Wynikiem iloczynu skalarnego dwóch wektorów jest skalar, czyli liczba rzeczywista. W programowaniu gier iloczyn skalarny znormalizowanych wektorów odgrywa ważną rolę.

Zadanie 4. Wyznacz iloczyn skalarny znormalizowanych wektorów kierunku z rozwiązania ćwiczenia 2.

Rozwiązanie.

$$\widehat{AB} \cdot \widehat{AC} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}} \right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}} \right) = \frac{9}{\sqrt{130}} + \frac{2}{\sqrt{130}} = \frac{11}{\sqrt{130}} \doteq 0,96$$

$$\widehat{BA} \cdot \widehat{BC} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}} \right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = -\frac{9}{\sqrt{130}} + \frac{2}{\sqrt{130}} = -\frac{7}{\sqrt{130}} \doteq -0,054$$

Iloczyn skalarny dwóch znormalizowanych wektorów jest bardzo przydatny, ponieważ mówi nam, w jakim stopniu dwa wektory są skierowane w tym samym lub podobnym kierunku! W tym przypadku wartość iloczynu skalarnego waha się od -1 do 1 : wartość 1 oznacza, że wektory są skierowane dokładnie w tym samym kierunku, wartość -1 oznacza, że są skierowane dokładnie w przeciwnych kierunkach, a wartość bliska 0 oznacza, że wektory są prawie prostopadłe do siebie. Powodem tego zakresu od -1 do 1 jest to, że pracujemy w zakresie wartości funkcji cosinus. Dla dowolnych dwóch wektorów $\vec{p}$, $\vec{q}$ iloczyn skalarny można również zapisać jako:

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \alpha,$$

gdzie α jest kątem pomiędzy wektorami $\vec{p}$ i $\vec{q}$.

Zadanie 5. Obserwator znajdujący się w punkcie początkowym patrzy na obiekt $A = [3; 1]$. Określić kąt α , o który obserwator musi się obrócić, aby znaleźć się bezpośrednio w kierunku obiektu. $B = [1; 2]$.

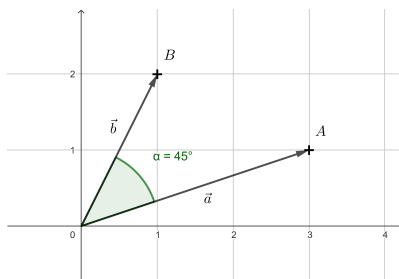
Rozwiązanie. Ponownie traktujemy punkty A i B jako punkty końcowe wektorów $\vec{a} = (3; 1)$ i $\vec{b} = (1; 2)$. Na podstawie wzoru na iloczyn skalarny dwóch wektorów możemy wyrazić $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Po podstawieniu określonych wartości otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{(3; 1) \cdot (1; 2)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{25}{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wiemy, że $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ jest dobrze znaną wartością trygonometryczną, co oznacza, że $\alpha = 45^\circ$. Alternatywnie, możemy obliczyć kąt α jako $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dlatego obserwator musi obrócić się o kąt 45° .



Rysunek 3: Rysunek do zadania 5

Gdyby znormalizowane wektory kierunku były jawnie podane w problemie, to ich iloczyn skalarny byłby równy $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

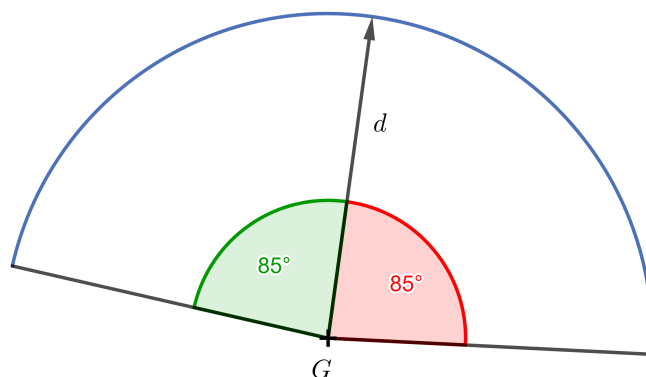
Jest to powód, dla którego kierunki znaków i wektory kierunków między znakami są zwykle przechowywane w znormalizowanej formie na listach atrybutów.

Iloczyn skalarny może być również wygodnie wykorzystany do rozwiązania następującego zadania. Powiedzmy, że projektuję grę, w której gracz próbuje ukryć się przed strażnikami. W takim przypadku interesuje nas, czy strażnik widzi poszczególnych graczy.

Aby gra była bardziej realistyczna, chcemy, aby strażnik miał pole widzenia, w którym gracz jest widoczny. W przypadku ludzi poziome pole widzenia obejmowane przez oboje oczy wynosi w przybliżeniu 180° , ale byłoby to zbyt szerokie dla naszego strażnika. Powiedzmy więc, że pole widzenia strażnika powinno wynosić 170° .

Zadanie 6. Osłona G ma pole widzenia wynoszące 170° . Jakie będą wartości iloczynów punktowych między kierunkiem patrzenia strażnika $\vec{d}$ i znormalizowane wektory kierunku do obiektów, które widzi strażnik?

Rozwiązanie. Od kierunku patrzenia strażnika do granic jego pola widzenia - zarówno w lewo, jak i w prawo - kąt wynosi 85° . Musimy tylko obliczyć $\cos 85^\circ \approx 0,087$. Zatem iloczyn punktów między kierunkiem patrzenia strażnika a znormalizowanymi wektorami kierunku do widocznych obiektów będą mieścić się w zakresie od około 0,087 do 1.



Rysunek 4: Rysunek do zadania 6

Na liście atrybutów powiązanych ze strażnikiem dodajemy nie tylko ich kierunek widzenia, ale także próg, który definiuje ich pole widzenia. Korzystając z tego progu, możemy sprawdzić, czy strażnik widzi danego gracza. Dla uproszczenia zaokrąglamy poprzedni wynik do jednego miejsca po przecinku i ograniczamy pole widzenia strażnika przy użyciu wartości progowej wynoszącej 0,1.

Zadanie 7. Określ, czy strażnik znajdujący się w punkcie początkowym widzi gracza $A = [3; -2]$, biorąc pod uwagę, że kierunek patrzenia strażnika to $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ a próg dla pola widzenia strażnika jest ustawiony na 0,1.

Rozwiązanie. Kierunek patrzenia strażnika jest już znormalizowanym wektorem. Musimy więc tylko znormalizować wektor kierunku od strażnika do gracza A . Ponieważ strażnik znajduje się w punkcie początkowym, jest to równoważne normalizacji wektora $\vec{a} = (3; -2)$. Otrzymujemy:

$$\hat{a} = \frac{(3; -2)}{3^2 + (-2)^2} = \frac{(3; -2)}{15} = \left(\frac{3}{15}; \frac{-2}{15}\right).$$

Teraz obliczamy iloczyn kropkowy dwóch znormalizowanych wektorów:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{3}{15}; \frac{-2}{15}\right) = \frac{3}{\sqrt{75}} - \frac{4}{\sqrt{75}} = -\frac{1}{\sqrt{75}} \doteq -0,12.$$

Ponieważ wynik nie mieści się w przedziale od 0,1 do 1, strażnik nie widzi gracza A . Co więcej, ujemny wynik wskazuje, że kąt między wektorami jest większy niż kąt prosty.

Zastanów się, jak zmieniłaby się sytuacja, gdyby strażnik nie znajdował się w punkcie początkowym.