

Vektory

Keywords: analytická geometrie, vektory, skalární součin

Vektory jsou důležité nejen v matematice ale i fyzice nebo informatice. V matematice se jimi zabývá část s názvem lineární algebra.

Vektor je většinou definován jako prvek matematické abstraktní struktury, tzv. vektorového prostoru. Typickým zástupcem takového prostoru jsou třeba všechny uspořádané n -tice reálných čísel (tj. například dvojice nebo trojice) společně s pravidly pro jejich sčítání a násobení nějakým číslem. Na střední škole je tento vektor typicky prezentován jako množina orientovaných úseček, které mají daný směr a stejnou velikost.

Ve fyzice se pomocí vektorů popisují veličiny jako rychlost a zrychlení pohybujícího se objektu, síly na něj působící, či elektromagnetické pole. V informatice je vektorem často myšlen jen uspořádaný seznam položek (nemusí jít jen o čísla). Vektory jsou efektivní možností, jak organizovat a ukládat objekty například v aplikacích strojového učení.

V informatice ale existuje i oblast, kde se vektory používají tím způsobem, jakým jsou definovány ve středoškolské matematice či fyzice. Touto oblastí je prostředí počítačových her. Zvládnutí práce s vektory je dokonce jedním ze základních stavebních kamenů k tomu, aby člověk mohl být programátorem her.

V závislosti na tom, zda vytváříte 2D nebo 3D hru, mají vektory dva nebo tři souřadnice a obecně se používají k reprezentaci geometrických vlastností objektů v herním světě. Pro jednoduchost budeme pracovat pouze v dvourozměrném prostoru tedy v rovině a to v kartézské souřadné soustavě.

Poznámka: Takových základních stavebních kamenů je třeba samozřejmě mnohem více. Kromě příslušného programovacího nástroje je třeba také znát matice transformací, jako je posunutí, otočení atd. V následujících úlohách se chceme zaměřit jen na operace s vektory.

Body a směrové vektory

V následujících příkladech budeme rozlišovat zadání bodů (v hranatých závorkách) a vektorů (v kulatých závorkách). Současně ale budeme pamatovat na to, že bod $A = [a_1; a_2]$ také můžeme chápat jako koncový bod vektoru $\vec{a} = (a_1; a_2)$, jehož počáteční bod je počátek souřadného systému.

Bod má souřadnice, ale na rozdíl od vektoru není určen délkou a směrem. Bod $[0, 0]$ nebo vektor $(0, 0)$ pro nás bude středem herního světa.

Běžným případem použití vektorů je výpočet vektoru, který popisuje vztah jednoho objektu vůči druhému. Vezměme si jednoduchý příklad bodů $A = [a_1; a_2]$ a $B = [b_1; b_2]$. Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ obvykle nazýváme směrový vektor. Pokud budou body A a B ve hře reprezentovat postavy, pak vektor $\overrightarrow{AB}$ určuje směr a jeho velikost pak vzdálenost, kterou postava A musí ujít, aby se dostala k postavě B .

Úloha 1. Ve 2D hře máme programátora ovládajícího postavu A a hráče ovládajícího postavu B . Postavy stojí na začátku na různých místech a jsou reprezentovány pro jednoduchost body A , B . Postava B postupně projde trasu ve směru vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$. Vyjádřete vektor, který programátor potřebuje určit pro výstřel postavy A na postavu B .

U každé postavy v herním světě se používá i vektor ve smyslu seznamu položek. Jednou z položek je

Results matter!

třeba jméno postavy, její úloha, poloha. Další vlastností každé postavy v herním světě je směr, kterým je tato postava natočena. K určení směru natočení se používá takzvaný normalizovaný směrový vektor, tedy směrový vektor délky 1.

Normalizované směrové vektory se používají i k uchování informace, jakým směrem se vyskytují ostatní postavy nebo objekty.

Poznámka: Důvod, proč jsou v herním světě používány normalizované verze směrových vektorů, vysvětlíme později.

Úloha 2. Mějme postavy $A = [-5; 2]$, $B = [1; -2]$, $C = [4; -1]$. Určete normalizované směrové vektory postav A a B směrem k ostatním postavám. Nakreslete odpovídající obrázek.

Úloha 3. Mějme polohu postavy $A = [a_1; a_2]$ a postavy $B = [b_1; b_2]$ stojících na různých místech. Určete

- normalizovaný směrový vektor $\widehat{BA}$,
- kde se bude postava B nacházet poté, co ujde tři jednotkové délky směrem k postavě A ?

Skalární součin a jeho použití

Výsledkem skalárního součinu dvou vektorů je skalár, tedy reálné číslo. V programování her má důležité místo skalární součin normalizovaných vektorů.

Úloha 4. Určete skalární součiny normalizovaných směrových vektorů z řešení Úlohy 2.

Úloha 5. Pozorovatel v počátku se dívá na objekt $A = [3; 1]$, určete úhel α o jaký se musí otočit, aby směr jeho pohledu mířil přímo na objekt $B = [1; 2]$.

Pokud by v zadání úlohy byly dané normalizované směrové vektory, jejich skalární součin by byl roven přímo $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

Toto je důvod proč bývají směry pohledů u postav a směrové vektory mezi postavami v seznamech položek uváděny v normalizovaném tvaru.

Skalární součin můžeme s výhodou použít i pro řešení následujícího problému. Řekněme, že vytvářím hru, ve které se hráč snaží schovat před nějakými strážemi. Bude nás tedy zajímat, zda strážný vidí či nevidí jednotlivé hráče.

Pro větší realističnost chceme, aby měl strážný zorné pole, ve kterém danou postavu vidí. U člověka se udává velikost zorného úhlu pro vidění oběma očima přibližně 180° . To by pro našeho strážného bylo až příliš, takže řekněme že chceme aby jeho zorný úhel byl například 170° .

Úloha 6. Zorný úhel strážného G je 170° , jakých hodnot budou nabývat skalární součiny mezi jeho směrem pohledu $\vec{d}$ a normalizovanými směrovými vektory k objektům, které strážný vidí?

Results matter!

Úloha 7. Určete zda strážný, umístěný v počátku, vidí hráče $A = [3; -2]$, jestliže směr pohledu strážného je $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ a hranice pro omezení zorného pole je dána hodnotou 0,1.