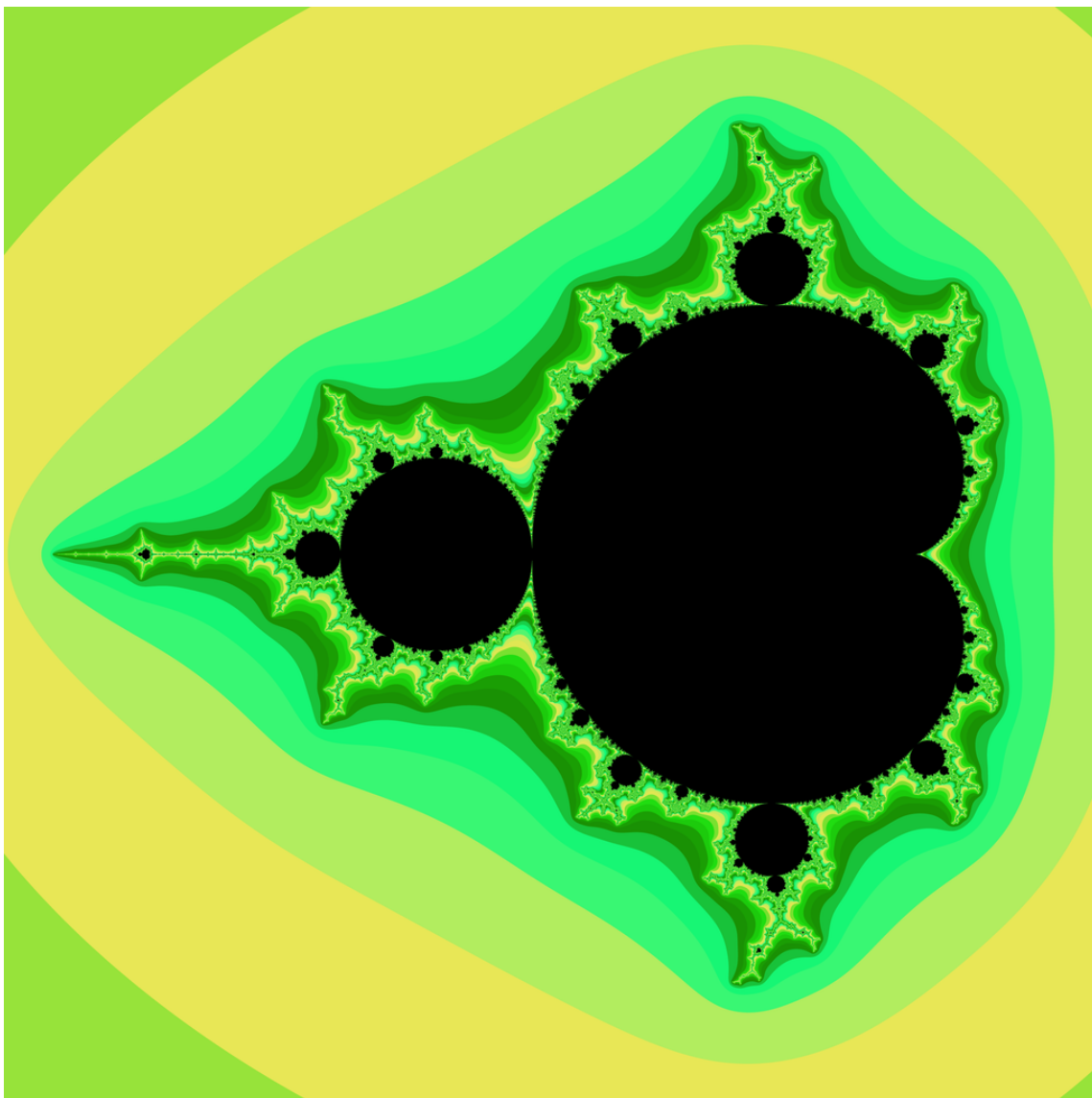


Mandelbrotova množina

Keywords: komplexné čísla, Gaussova rovina, postupnosti, konvergencia, absolútna hodnota

Mandelbrotova množina je jedným z najznámejších a najkrajších fraktálov, ktorý fascinuje matematikov, vedcov aj umelcov po celom svete. Hoci na prvý pohľad vyzerá ako zložitý obrazec, je založená na jednoduchom matematickom pravidle opakovaného umocňovania a sčítania. To, čo ju robí takou zaujímavou, je jej nekonečná zložitosť a nádherné vzory, ktoré sa skrývajú v každom detaile.



Obr. 1: Mandelbrotova množina; farba bodov v jej okolí zodpovedá poradiu člena postupnosti, u ktorého sa prvýkrát zistí, že táto postupnosť ide do nekonečna.

Využitie Mandelbrotovej množiny siaha ďaleko za hranice matematiky. Nachádza sa v počítačovej grafike, kde sa používa na tvorbu zložitých a realistických objektov pri modelovaní prírodných štruktúr, ako sú pobrežia, hory alebo oblačnosť. Dá sa využiť dokonca aj v ekonómii a fyzike, kde pomáha pri simuláciách chaotických systémov.

Mandelbrotova množina je dôkazom, že aj jednoduché matematické postupy môžu viesť k neuveriteľne komplexným a krásnym výsledkom, ktoré majú reálne využitie.

Vytvorenie množiny

Predstavme si pomerne jednoduchý rekurentný vzťah

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

kde za počiatočnú hodnotu dosadíme $z_0 = 0$ a c predstavuje ľubovoľné komplexné číslo. Francúzsko-amerického matematika Benoita Mandelbrota (1924–2010) zaujímalo, kedy je postupnosť takto vzniknutých čísel ohraničená, t. j. pre ktoré c z komplexnej roviny postupnosť konverguje alebo osciluje. Ak v nejakom bode postupnosť diverguje, zaujímalo ho aj to, ako rýchlo. Dá sa dokázať, že ak absolútna hodnota niektorého člena postupnosti z_n presiahne hodnotu 2, potom táto postupnosť ohraničená nie je.

Mandelbrotova množina je teda množina bodov c v komplexnej rovine, pre ktoré postupnosť vytvorená vyššie uvedenou rekurentnou formulou konverguje alebo osciluje. Vďaka uvedenému faktovi vieme, že pre každý člen z tejto postupnosti musí platiť, že jeho absolútna hodnota $|z|$ je menšia alebo rovná dvom.

Overenie, či dané c patrí do Mandelbrotovej množiny, prebieha tak, že vypočítame jednotlivé iterácie a sledujeme absolútne hodnoty týchto iterácií. Pre výpočet iterácií použijeme rekurentný vzťah

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0.$$

Napr. pre $c = -i$ máme

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 - i = 0^2 - i = -i, & |z_1| &= 1, \\ z_2 &= z_1^2 - i = (-i)^2 - i = -1 - i, & |z_2| &= \sqrt{2}, \\ z_3 &= z_2^2 - i = (-1 - i)^2 - i = i, & |z_3| &= 1, \\ z_4 &= z_3^2 - i = (i)^2 - i = -1 - i, & |z_4| &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Z výpočtu je jasné, že sa budú stále opakovať hodnoty $-i$ a $-1 - i$. Podmienka $|z| \leq 2$ bude teda vždy splnená, a preto číslo $-i$ do Mandelbrotovej množiny patrí.

Úlohy

Úloha 1. Overte, či komplexné čísla 1 ; i ; -1 ; $1 + i$ patria do Mandelbrotovej množiny.

Riešenie. Pre jednoduchosť uvažujeme len niekoľko prvých iteračných krokov. Obráz čísla c v Gaussovej rovine patrí do Mandelbrotovej množiny vtedy, ak pre všetky výsledky iteračného výpočtu je absolútna hodnota výsledku menšia alebo rovná 2.

Iteračný proces pre $c = 1$.

$$z_1 = z_0^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1, \quad |z_1| = 1,$$

$$z_2 = z_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2, \quad |z_2| = 2,$$

$$z_3 = z_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5, \quad |z_3| = 5.$$

Podmienka $|z| \leq 2$ bola porušená už v treťom kroku, preto číslo 1 nepatrí do Mandelbrotovej množiny.

Iteračný proces pre $c = i$.

$$z_1 = z_0^2 + i = 0^2 + i = i, \quad |z_1| = 1,$$

$$z_2 = z_1^2 + i = i^2 + i = -1 + i, \quad |z_2| = \sqrt{2},$$

$$z_3 = z_2^2 + i = (-1 + i)^2 + i = -i, \quad |z_3| = 1,$$

$$z_4 = z_3^2 + i = (-i)^2 + i = -1 + i, \quad |z_4| = \sqrt{2}.$$

Z výpočtu je jasné, že sa budú neustále opakovať výsledky $-1 + i$ a i a podmienka $|z| \leq 2$ je vždy splnená. Preto číslo i patrí do Mandelbrotovej množiny.

Iteračný proces pre $c = -1$.

$$z_1 = z_0^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1, \quad |z_1| = 1,$$

$$z_2 = z_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0, \quad |z_2| = 0,$$

$$z_3 = z_2^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1, \quad |z_3| = 1.$$

Výsledky sa cyklicky opakujú a platí $|z| \leq 2$, preto číslo -1 patrí do Mandelbrotovej množiny.

Iteračný proces pre $c = 1 + i$.

$$z_1 = z_0^2 + 1 + i = 0^2 + 1 + i = 1 + i, \quad |z_1| = \sqrt{2},$$

$$z_2 = z_1^2 + 1 + i = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 2i + i^2 + 1 + i = 1 + 3i, \quad |z_2| = \sqrt{10}.$$

Podmienka $|z| \leq 2$ bola porušená už v druhom kroku, preto číslo $1 + i$ nepatrí do Mandelbrotovej množiny.

Úloha 2. Dokážte, že ak existuje $k \in \mathbb{N}$ také, že $|z_k| > 2$, potom postupnosť z_n diverguje.

Riešenie. Použijeme rekurentný vzťah:

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|}. \quad (1)$$

Aplikujeme trojuholníkovú nerovnosť:

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

kde $a = z^2 + c$ a $b = -c$, dostaneme

$$|z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |-c| = |z^2 + c| + |c|$$

a odtiaľ $|z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c|$.

Dosadíme do (1) a úpravou dostaneme

$$\frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|} \geq \frac{|z_n|^2 - |c|}{|z_n|} = |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|}.$$

Results matter!

Naviac vieme, že existuje také n , že platí $|z_n| > |c|$. Pre $|c| \leq 2$ to plyní z predpokladu. Pre $c > 2$ potom pre $n = 2$ platí

$$|z_2| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) > |c|.$$

Môžeme teda zapísať

$$\frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|} \geq \frac{|z_n|^2 - |c|}{|z_n|} = |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|} > |z_n| - 1 > 1.$$

A odtiaľ potom

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1,$$

alebo $|z_{n+1}| > |z_n|$ a naša postupnosť diverguje.

Literatúra

- Čápka Hartinger, David. *Mandelbrotova množina - lekce 3 [online]* <https://www.itnetwork.cz/algorithmy/graficke/algvykresleni-fraktalu-mandelbrotovy-mnoziny> [cit. 22. 9. 2023]
- Wikipedie. *Mandelbrotova množina [online]*. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Mandelbrotova_mno%C5%BDina [cit. 22. 9. 2023].
- PantheraLeo1359531. *Mandelbrotova množina - obrázek [online]*. Dostupné z https://commons.wikimedia.org/w/index.php/File:Mandelbrot_set_1024x1024.png [cit. 22. 9. 2023]