Conjunto de Mandelbrot

Keywords: números complejos, plano de Gauss, secuencias, convergencia, valor absoluto

El conjunto de Mandelbrot es uno de los fractales más famosos y bellos, que fascina a matemáticos, científicos y artistas de todo el mundo. Aunque a primera vista parece un patrón complejo, se basa en una sencilla regla matemática de suma y multiplicación
repetida. Pero lo que lo hace tan interesante es su infinita complejidad y los bellos patrones que se esconden en cada detalle.

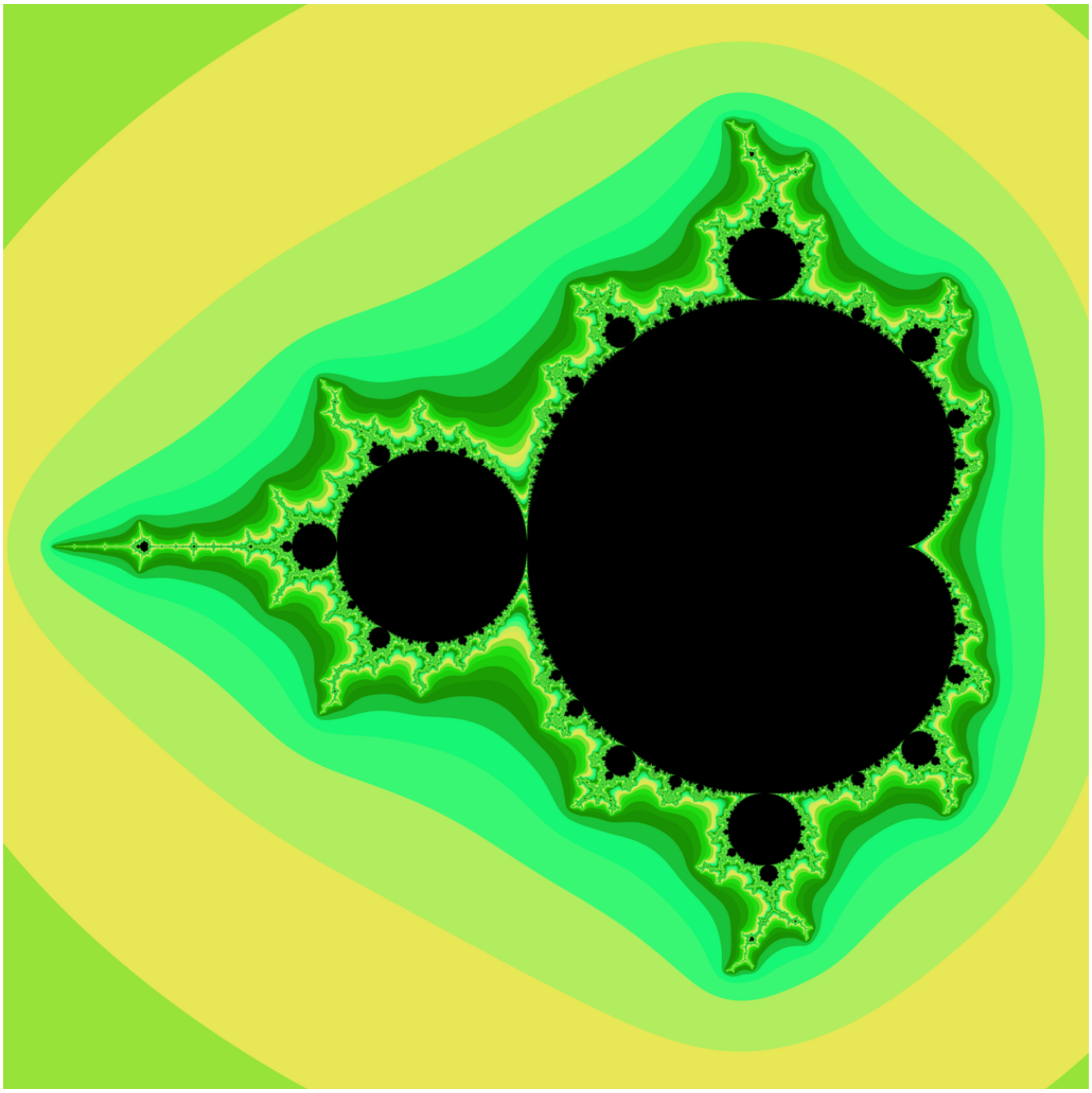

Figura 1: Conjunto de Mandelbrot. El color de los puntos de su vecindad corresponde al orden del miembro de la secuencia que se encuentra primero que se dirige al infinito.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

El uso del conjunto de Mandelbrot va mucho más allá de matemáticas. Se puede encontrar en gráficos por ordenador, donde se utiliza para crear objetos complejos y realistas al modelar estructuras naturales como costas, montañas o nubes. Incluso puede emplearse en economía y física, donde ayuda a simular sistemas caóticos.

El conjunto de Mandelbrot es la prueba de que incluso procedimientos matemáticos sencillos pueden conducir a resultados increíblemente complejos y bellos que tienen aplicaciones reales.

Creación de un conjunto

Imaginemos una relación recurrente relativamente sencilla

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

donde el valor inicial es $z_0 = 0$ y c es un número complejo arbitrario. El matemático franco-estadounidense Benoit Mandelbrot (1924–2010) se interesó por saber cuándo la secuencia de números así generada está acotada, es decir, para qué c del plano complejo la secuencia converge u oscila. Si en algún punto la sucesión diverge, quería saber a qué velocidad. Se puede demostrar que si el valor absoluto de cualquier miembro de la secuencia z_n es superior a 2, entonces la secuencia no está acotada.

El *conjunto de Mandelbrot* es entonces el conjunto de puntos c del plano complejo para los que la sucesión generada por la fórmula de recurrencia converge u oscila. Gracias al hecho anterior, sabemos que para cada miembro z de esta sucesión, debe cumplirse que su valor absoluto $|z|$ sea menor o igual que dos.

Para verificar si un c dado pertenece al conjunto de Mandelbrot, se calculan las iteraciones individuales y se observan los valores absolutos de estas iteraciones. Para calcular las iteraciones, utilizamos la relación recurrente

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \qquad z_0 = 0.$$

Por ejemplo, para $c = -i$ tenemos

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 - i = 0^2 - i = -i, \quad |z_1| = 1, \\ z_2 &= z_1^2 - i = (-i)^2 - i = -1 - i, \quad |z_2| = \sqrt{2}, \\ z_3 &= z_2^2 - i = (-1-i)^2 - i = i, \quad |z_3| = 1, \\ z_4 &= z_3^2 - i = (i)^2 - i = -1 - i, \quad |z_4| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

El cálculo muestra que los resultados de $-i$ y $-1-i$ se repetirán continuamente. Por lo tanto, siempre se cumplirá la condición $|z| \le 2$ y, por lo tanto, el número $-i$ pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Tareas

Tarea 1. Verificar que los números complejos 1; i; -1; $1+i$ pertenecen al conjunto de Mandelbrot.

Solución. Por simplicidad, consideraremos sólo los primeros pasos de los cálculos iterativos. Se sostiene que la imagen de un número c en el plano de Gauss pertenece al conjunto de Mandelbrot si para todos los resultados de un calculo iterativo el valor absoluto del resultado es menor o igual a 2.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Proceso iterativo para $c = 1$.

$$z_1 = z_0^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1, \quad |z_1| = 1,$$
$$z_2 = z_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2, \quad |z_2| = 2,$$
$$z_3 = z_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5, \quad |z_3| = 5.$$

El cálculo muestra que la condición $|z| \leq 2$ no se cumplió en el tercer paso de iteración y el número 1 no pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Proceso iterativo para $c = i$.

$$z_1 = z_0^2 + i = 0^2 + i = i, \quad |z_1| = 1,$$
$$z_2 = z_1^2 + i = i^2 + i = -1 + i, \quad |z_2| = \sqrt{2},$$
$$z_3 = z_2^2 + i = (-1 + i)^2 + i = -i, \quad |z_3| = 1,$$
$$z_4 = z_3^2 + i = (-i)^2 + i = -1 + i, \quad |z_4| = \sqrt{2}.$$

El cálculo muestra que los resultados de $-1 + i$ y i se repetirán continuamente. La condición $|z| \leq 2$ se cumplirá siempre, por lo que el número i pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Proceso iterativo para $c = -1$.

$$z_1 = z_0^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1, \quad |z_1| = 1,$$
$$z_2 = z_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0, \quad |z_2| = 0,$$
$$z_3 = z_2^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1, \quad |z_3| = 1.$$

Los resultados se repetirán de nuevo y siempre se cumplirá la condición $|z| \leq 2$, por lo tanto el número -1 pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Proceso iterativo para $c = 1 + i$.

$$z_1 = z_0^2 + 1 + i = 0^2 + 1 + i = 1 + i, \quad |z_1| = \sqrt{2},$$
$$z_2 = z_1^2 + 1 + i = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 2i + i^2 + 1 + i = 1 + 3i, \quad |z_2| = \sqrt{10}.$$

El cálculo muestra que la condición $|z| \leq 2$ no se cumplió en el segundo paso iterativo y que el número $1 + i$ no pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Tarea 2. Demostrar que si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|z_k| > 2$, entonces la sucesión z_n diverge.

Solución. Utilizando la relación de recurrencia, obtenemos la proporción

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|}. \tag{1}$$

Si utilizamos la desigualdad triangular

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

donde $a = z^2 + c$ a $b = -c$, obtenemos

$$|z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |-c| = |z^2 + c| + |c|$$

y a partir de ahí $|z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c|$.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

Sumando a (1) y modificando para obtener

$$\frac{|z_n^2+c|}{|z_n|} \geq \frac{|z_n|^2-|c|}{|z_n|} = |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|}.$$

Además, sabemos que existe n, tal que $|z_n| > |c|$ se cumple. Para $|c| \leq 2$ esto se deduce de la suposición. Para $c > 2$ entonces para $n = 2$ se cumple

$$|z_2| = |c^2+c| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c|-1) > |c|.$$

Así que podemos escribir

$$\frac{|z_n^2+c|}{|z_n|} \geq \frac{|z_n|^2-|c|}{|z_n|} = |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|} > |z_n| - 1 > 1.$$

Y así desde aquí

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1,$$

o $|z_{n+1}| > |z_n|$ y nuestra secuencia diverge.

Bibliografía

- Čápka Hartinger, David. *Mandelbrotova množina - lekce 3 [online]* https://www.itnetwork.cz/algoritmy/graficke/alg
vykresleni-fraktalu-mandelbrotovy-mnoziny} [cit. 22. 9. 2023]
- Wikipedie. *Mandelbrotova množina [online]*. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Mandelbrotova_mno %C5 %
[cit. 22. 9. 2023].
- PantheraLeo1359531. *Mandelbrotova množina - obrázek [online]*. Dostupné z https://commons.wikimedia.org/w/in
[cit. 22. 9. 2023]

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union