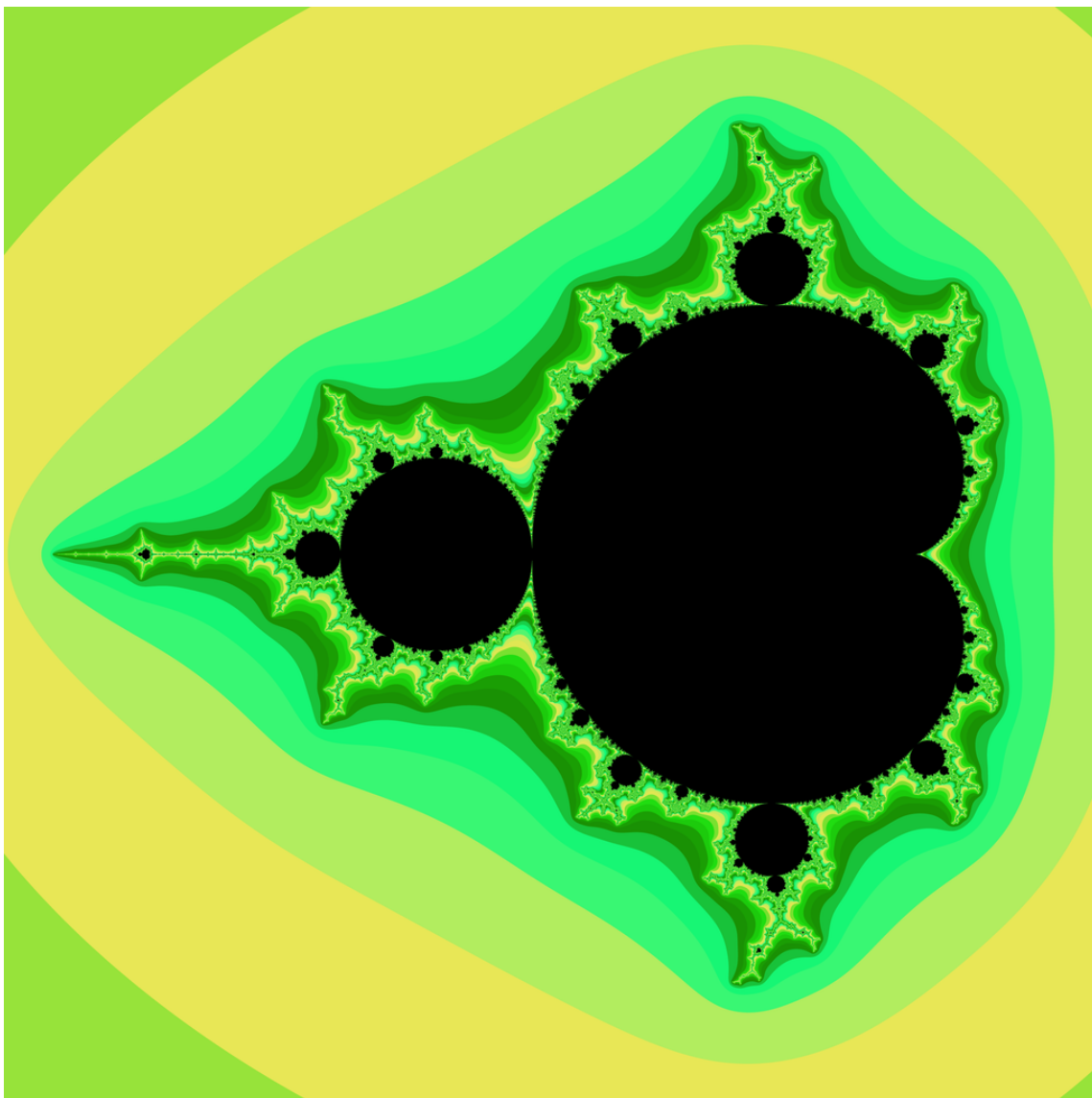


Mandelbrotova množina

Keywords: komplexní čísla, Gaussova rovina, posloupnosti, konvergence, absolutní hodnota

Mandelbrotova množina je jedním z nejznámějších a nejkrásnějších fraktálů, který fascinuje matematiky, vědce i umělce po celém světě. Ačkoli na první pohled vypadá jako složitý obrazec, je založena na jednoduchém matematickém pravidle opakovaného umocňování a sčítání. Co ji ale činí tak zajímavou, je její nekonečná složitost a nádherné vzory, které se skrývají v každém detailu.



Obrázek 1: Mandelbrotova množina; barva bodů v jejím okolí odpovídá pořadí členu posloupnosti, u něhož je poprvé zjištěno, že tato posloupnost jde do nekonečna.

Využití Mandelbroty množiny sahá daleko za hranice matematiky. Najdeme ji v počítačové grafice, kde se používá k vytváření složitých a realistických objektů při modelování přírodních struktur, jako jsou pobřeží, hory nebo oblačnost. Dá se využít dokonce i v ekonomii a fyzice, kde pomáhá při simulaci chaotických systémů.

Mandelbrotova množina je důkazem, že i jednoduché matematické postupy mohou vést k neuvěřitelně komplexním a krásným výsledkům, které mají reálné využití.

Vytvoření množiny

Představme si poměrně jednoduchý rekurentní vztah

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

kde se za počáteční hodnotu dosadí $z_0 = 0$ a c představuje libovolné komplexní číslo. Francouzsko-amerického matematika Benoita Mandelbrota (1924–2010) zajímalo, kdy je posloupnost takto vzniklých čísel omezená, tj. pro která c z komplexní roviny posloupnost konverguje nebo osciluje. Pokud v nějakém bodě posloupnost diverguje, tak chtěl vědět, jak rychle. Lze dokázat, že překročí-li absolutní hodnota některého členu posloupnosti z_n hodnotu 2, pak tato posloupnost omezená není.

Mandelbrotova množina je pak množina bodů c v komplexní rovině, pro něž posloupnost vytvořená rekurentní formulí konverguje nebo osciluje. Díky výše uvedenému faktu víme, že pro každý člen z této posloupnosti musí platit, že jeho absolutní hodnota $|z|$ je menší nebo rovna dvěma.

Ověření, zda dané c patří do Mandelbroty množiny probíhá tak, že vypočteme jednotlivé iterace a sledujeme absolutní hodnoty těchto iterací. Pro výpočet iterací využijeme rekurentní vztah

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0.$$

Např. pro $c = -i$ máme

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 - i = 0^2 - i = -i, & |z_1| &= 1, \\ z_2 &= z_1^2 - i = (-i)^2 - i = -1 - i, & |z_2| &= \sqrt{2}, \\ z_3 &= z_2^2 - i = (-1 - i)^2 - i = i, & |z_3| &= 1, \\ z_4 &= z_3^2 - i = (i)^2 - i = -1 - i, & |z_4| &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Z výpočtu je patrné, že se budou neustále opakovat výsledky $-i$ a $-1 - i$. Podmínka $|z| \leq 2$ bude proto vždy splněna, a tedy číslo $-i$ do Mandelbroty množiny patří.

Úlohy

Úloha 1. Ověřte, zda komplexní čísla 1 ; i ; -1 ; $1 + i$ patří do Mandelbroty množiny.

Řešení. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze několik prvních iteračních kroků. Platí, že obraz čísla c v Gaussově rovině patří do Mandelbroty množiny, jestliže pro všechny výsledky iteračního výpočtu je absolutní hodnota výsledku menší nebo rovna 2.

Iterační proces pro $c = 1$.

$$z_1 = z_0^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1, \quad |z_1| = 1,$$

$$z_2 = z_1^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2, \quad |z_2| = 2,$$

$$z_3 = z_2^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5, \quad |z_3| = 5.$$

Z výpočtu je patrné, že podmínka $|z| \leq 2$ nebyla splněna už v třetím iteračním kroku a číslo 1 do Mandelbrotovy množiny nepatří.

Iterační proces pro $c = i$.

$$z_1 = z_0^2 + i = 0^2 + i = i, \quad |z_1| = 1,$$

$$z_2 = z_1^2 + i = i^2 + i = -1 + i, \quad |z_2| = \sqrt{2},$$

$$z_3 = z_2^2 + i = (-1 + i)^2 + i = -i, \quad |z_3| = 1,$$

$$z_4 = z_3^2 + i = (-i)^2 + i = -1 + i, \quad |z_4| = \sqrt{2}.$$

Z výpočtu je patrné, že se budou neustále opakovat výsledky $-1 + i$ a i . Podmínka $|z| \leq 2$ bude vždy splněna, proto číslo i do Mandelbrotovy množiny patří.

Iterační proces pro $c = -1$.

$$z_1 = z_0^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1, \quad |z_1| = 1,$$

$$z_2 = z_1^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 0, \quad |z_2| = 0,$$

$$z_3 = z_2^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1, \quad |z_3| = 1.$$

Výsledky se budou opět opakovat a podmínka $|z| \leq 2$ bude vždy splněna, proto číslo -1 do Mandelbrotovy množiny patří.

Iterační proces pro $c = 1 + i$.

$$z_1 = z_0^2 + 1 + i = 0^2 + 1 + i = 1 + i, \quad |z_1| = \sqrt{2},$$

$$z_2 = z_1^2 + 1 + i = (1 + i)^2 + 1 + i = 1 + 2i + i^2 + 1 + i = 1 + 3i, \quad |z_2| = \sqrt{10}.$$

Z výpočtu je patrné, že podmínka $|z| \leq 2$ nebyla splněna už v druhém iteračním kroku a číslo $1 + i$ do Mandelbrotovy množiny nepatří.

Úloha 2. Dokažte, že existuje-li $k \in \mathbb{N}$ takové, že $|z_k| > 2$, pak posloupnost z_n diverguje.

Řešení. Užitím rekurentního vztahu získáme podíl

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|}. \quad (1)$$

Použijeme-li trojúhelníkovou nerovnost

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

kde $a = z^2 + c$ a $b = -c$, dostaneme

$$|z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |-c| = |z^2 + c| + |c|$$

a odtud $|z^2 + c| \geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c|$.

Results matter!

Dosazením do (1) a úpravou dostaneme

$$\frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|} \geq \frac{|z_n|^2 - |c|}{|z_n|} = |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|}.$$

Navíc víme, že existuje takové n , že platí $|z_n| > |c|$. Pro $|c| \leq 2$ to plyne z předpokladu. Pro $c > 2$ pak pro $n = 2$ platí

$$|z_2| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) > |c|.$$

Můžeme tedy psát

$$\frac{|z_n^2 + c|}{|z_n|} \geq \frac{|z_n|^2 - |c|}{|z_n|} = |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|} > |z_n| - 1 > 1.$$

A odtud tedy

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1,$$

neboli $|z_{n+1}| > |z_n|$ a naše posloupnost diverguje.

Literatura

- Čápka Hartinger, David. *Mandelbrotova množina - lekce 3 [online]* <https://www.itnetwork.cz/algoritmy/graficke/algvykresleni-fraktalu-mandelbrotovy-mnoziny> [cit. 22. 9. 2023]
- Wikipedie. *Mandelbrotova množina [online]*. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Mandelbrotova_mno%C5%BDina [cit. 22. 9. 2023].
- PantheraLeo1359531. *Mandelbrotova množina - obrázek [online]*. Dostupné z https://commons.wikimedia.org/w/index.php/File:Mandelbrot_set_1024x1024.png [cit. 22. 9. 2023]