

Ktorý žreb je výhodný?

Keywords: postupnosti a rady, pravdepodobnosť, očakávaná hodnota, geometrická postupnosť

Veľmi často sa v živote dostávame do situácií, kde hrajú úlohu náhoda a pravdepodobnosť. Predstavte si, že stojíte pred voľbou medzi niekoľkými možnosťami a to napríklad pri výbere žrebu alebo investície do projektu. Každá voľba má svoje riziká a potenciálne odmeny, otázkou však je, ako zistiť, ktorá z nich je najvýhodnejšia? Práve tu vstupuje do hry tzv. očakávaná hodnota. Očakávaná hodnota nám hovorí, aký výsledok môžeme v priemere očakávať, keď sa rozhodneme pre danú možnosť. Pomáha nám lepšie odhadnúť, čo sa v dlhodobom horizonte oplatí. Nejde o presnú predpoveď, ale o nástroj, ktorý nám umožňuje lepšie porozumieť riziku a odmenám. Platí to ako v jednoduchých hrách, tak v reálnych životných rozhodnutiach. Uvažujme napríklad dva žreby:

Žreb A: Stojí 10 Kč a s pravdepodobnosťou 0,1 vyhráme 100 Kč, inak nevyhráme nič.

Žreb B: Stojí 10 Kč a s pravdepodobnosťou 0,2 vyhráme 60 Kč, inak nevyhráme nič.

Pri žrebe A očakávame, že keď kúpime 10 žrebov, tak jeden z nich vyhrá 100 Kč a deväť nič. Môžeme teda očakávať, že každý žreb nám v priemere prinesie 10 Kč. Podobne aj pri žrebe B očakávame, že keď kúpime 10 žrebov, tak dva z nich vyhrajú 60 Kč a osem nič. Môžeme teda očakávať, že každý žreb nám v priemere prinesie 12 Kč. Vidíme teda, že žreb B je výhodnejší.

Očakávaná hodnota

Práve vypočítaná priemerná výhra sa označuje ako *očakávaná hodnota* (alebo tiež *stredná hodnota*).

Všeobecne môžeme povedať, že pre náhodnú veličinu X , ktorá nadobúda konečne veľa hodnôt $x_1, \dots, x_k$ s pravdepodobnosťami $p_1, \dots, p_k$ vypočítame jej očakávanú hodnotu

$$EV = \sum_{i=1}^k x_i p_i.$$

Ktorý žreb je najlepšší?

Pozrime sa na tri žreby. Čiernu perlu v hodnote 50 Kč, Čiernu perlu v hodnote 100 Kč a žreb Rentier v hodnote 50 Kč. Štruktúra výhier pre žreb Čierna perla v hodnote 50 Kč, ktorých je celkom vydaných 13 000 000 kusov, vyzerá nasledovne.

Výška výhry na žrebe (v Kč)	Počet výherných žrebov
50	1 820 000
100	1 040 000
150	260 000
200	130 000
300	130 000
500	104 000
1 000	5 550
2 000	2 300

Výška výhry na žrebe (v Kč)	Počet výherných žrebov
4 000	480
10 000	185
20 000	84
100 000	14
1 500 000	6
Celkem	3 492 619

Podobne vyzerá aj štruktúra výhier pre žreb Čierna perla v hodnote 100 Kč, ktorých je vydaných celkom 15 000 000 kusov.

Výška výhry na žrebe (v Kč)	Počet výherných žrebov
100	2 400 000
200	900 000
300	450 000
500	150 000
600	150 000
900	75 000
1 000	75 000
1 500	20 000
6 000	4 000
20 000	185
50 000	84
100 000	30
200 000	13
5 000 000	6
Celkem	4 224 318

Do tretice sa pozrieme na žreb Rentier, ktorých je vydaných 8 000 000 kusov a výhry sú dané tabuľkou nižšie.

Výška výhry na žrebe (v Kč)	Počet výherných žrebov
50	960 000
100	720 000
150	160 000
250	160 000
500	70 000
1 000	1 300
2 000	500
5 000	160
10 000	80
100 000	6
3 500 000	3
Celkem	2 072 049

Pričom hlavná výhra 3 500 000 Kč sa nevypláca naraz, ale skladá sa z okamžitej výhry 500 000 Kč a renty 50 000 Kč počas 5 rokov.

Úloha 1. Pri ktorom z uvedených žrebov je najväčšia šanca na výhru?

Riešenie. V prípade žrebu Čierna perla za 50 Kč je z celkového počtu 13 000 000 kusov výherných 3 492 619 žrebov (pozri posledný riadok tabuľky). Pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žreb je výherný môžeme vypočítať ako

$$P(V_1) = \frac{3\,492\,619}{13\,000\,000} = 0,268633.$$

Môžeme teda povedať, že pri kúpe jedného žrebu máme šancu na výhru zhruba 26,86 %. Úpravou zlomku môžeme tiež zistiť, že šanca na získanie výherného žrebu je 1 : 3,72.

Podobne v prípade žrebu Čierna perla v hodnote 100 Kč dostaneme

$$P(V_2) = \frac{4\,224\,318}{15\,000\,000} = 0,2816212.$$

Znamená to, že šanca na výhru je 28,16 % alebo tiež 1 : 3,55.

V prípade žrebu Rentier potom máme

$$P(V_3) = \frac{2\,072\,049}{8\,000\,000} = 0,259,$$

teda šanca na výhru je 25,9 % alebo 1 : 3,86.

Porovnaním jednotlivých pravdepodobností výhry vidíme, že najväčšiu šancu na víťazný žreb máme pri kúpe žrebu Čierna perla v hodnote 100 Kč. V tejto súvislosti môžeme ešte uvážiť, čomu hovoríme výherný žreb. Za výherný žreb je väčšinou považovaný taký žreb, vďaka ktorému získame ľubovoľnú finančnú sumu. Pokiaľ sme ale za žreb zaplatili 100 Kč, tak výhra 100 Kč nám ju zaplatí späť, ale nič sme vlastne nevyhrali. Aby sme teda získali pravdepodobnosť, že skutočne vyhráme, tak nebudeme v našich tabuľkách výhier uvažovať prvý riadok. Dostaneme tak upravené pravdepodobnosti výhier

$$P(V_1) = \frac{1\,672\,619}{13\,000\,000} = 0,128633$$

$$P(V_2) = \frac{1\,824\,318}{15\,000\,000} = 0,1216212$$

$$P(V_3) = \frac{1\,112\,049}{8\,000\,000} = 0,139.$$

Vidíme, že pokiaľ uvážime žreby, ktoré naozaj vyhrávajú čiastku väčšiu než ich cena, tak najlepším je zrazu žreb Rentier, kde je šanca na výhru 13,9 %.

Úloha 2. Aká je očakávaná hodnota každého žrebu?

Riešenie. Pre výpočet očakávanej hodnoty podľa definície potrebujeme poznať pravdepodobnosti jednotlivých výhier:

Výška výhry na žreb (v Kč)	Pravdepodobnosť danej výhry
50	0,14
100	0,08
150	0,02
200	0,01
300	0,01
500	0,008
1 000	0,000 426 9

Výška výhry na žreb (v Kč)	Pravdepodobnosť danej výhry
2 000	0,000 176 923
4 000	0,000 036 923
10 000	0,000 014 231
20 000	0,000 006 461 538
100 000	0,000 006 461 538
1 500 000	0,000 000 461 538

Ak označíme hodnoty jednotlivých výhier n_1 až n_{13} a ich zodpovedajúce pravdepodobnosti p_1 až p_{13} , dostaneme očakávanú hodnotu $EV(L_1)$ žrebu Čierna perla

$$EV(L_1) = \sum_{k=1}^{13} n_k p_k = 29 \text{ Kč.}$$

Vzhľadom k tomu, ako sa jednotlivé pravdepodobnosti počítajú, môžeme očakávanú hodnotu spočítať tiež takto

$$EV(L_1) = \frac{1}{13\,000\,000} (50 \cdot 1\,820\,000 + 100 \cdot 1\,040\,000 + \dots + 100\,000 \cdot 14 + 1\,500\,000 \cdot 6).$$

Tento prístup je výhodnejší, keďže nemusíme pri tabuľke výhier počítať pravdepodobnosť každej možnej výhry. Pre žreb Čierna perla v hodnote 100 Kč potom dostaneme očakávanú hodnotu $EV(L_2)$:

$$EV(L_2) = \frac{1}{15\,000\,000} (100 \cdot 2\,400\,000 + 200 \cdot 900\,000 + \dots + 200\,000 \cdot 13 + 5\,000\,000 \cdot 6) = 64 \text{ Kč.}$$

A pre žreb Rentiér dostávame očakávanú hodnotu $EV(L_3)$:

$$EV(L_3) = \frac{1}{8\,000\,000} (50 \cdot 960\,000 + 100 \cdot 720\,000 + \dots + 100\,000 \cdot 6 + 3\,500\,000 \cdot 3) = 29,25 \text{ Kč.}$$

Poznámka.

- Zvyčajte je pri lotérii uvedená celková čiastka na výhry a počet žrebov a očakávaná hodnota je potom samozrejme podiel daných dvoch čísel.
- Uvedené hodnoty sú v skutočnosti mnohokrát ešte nižšie, keďže sa z výhier často platí daň.
- Rovnaký prístup sa dá použiť aj pre výpočet očakávanej hodnoty balenia rôznych kartových zberateľských hier (Pokémon, Lorcan, Magic the Gathering alebo športové kartičky).

Úloha 3. V predchádzajúcich príkladoch sme uvažovali hlavnú výhru žrebu Rentiér v hodnote 3 500 000 Kč. Je to však naozaj skutočná hodnota výhry, vzhľadom k tomu, že nie je vyplatená naraz?

Riešenie. Jednoduchá odpoveď je, že nie je.

Je nutné si uvedomiť, že pokiaľ by sme peniaze dostali ihneď, tak by sme ich mohli uložiť alebo nejako investovať. Pre zistenie, aká je hodnota 50 000 Kč, ktoré dostaneme za mesiac sa dá využiť koncept, ktorému sa hovorí *súčasná hodnota* (*present value*). Pri jej použití si kladieme otázku, koľko peňazí by sme museli dnes investovať, aby sme za mesiac dostali požadovanú čiastku (napr. uvažovaných 50 000 Kč). A táto hodnota je potom tá tzv. súčasná hodnota.

Results matter!

Dajme tomu, že by sme danú čiastku P_0 mohli uložiť na mesiac s mesačnou úrokovou sadzbou 0,5 %. Za mesiac by sme potom dostali čiastku $P_1 = 1,005P_0$. Súčasná hodnota je potom práve suma P_0 , ktorú musíme uložiť tak, aby P_1 bolo 50 000 Kč, t. j.

$$P_0 = \frac{50\,000}{1,005} = 49\,751,24 \text{ Kč.}$$

Pokiaľ by sme chceli určiť súčasnú hodnotu čiastky, ktorú získame za n mesiacov, uvažujeme, že danú čiastku necháme uloženú po celý čas. Využijeme potom zložené úrokovanie a dostaneme súčasnú hodnotu P_n , ktorú získame za n mesiacov ako

$$P_0 = \frac{P_n}{1,005^n}.$$

Pripomeňme, že hlavná výhra žrebu Rentier sa skladá z čiastky 500 000 Kč a tridsiatich mesačných platieb vo výške 50 000 Kč. Ak uvažíme mesačnú úrokovú mieru vo výške 0,5 %, je súčasná hodnota PV týchto splátok

$$PV = \frac{50\,000}{1,005} + \frac{50\,000}{1,005^2} + \dots + \frac{50\,000}{1,005^{29}} + \frac{50\,000}{1,005^{30}}.$$

Môžeme si všimnúť, že sa jedná o súčet členov geometrickej postupnosti a výpočet si tak značne skrátiť

$$PV = \frac{50\,000}{1,005} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,005}\right)^{30}}{1 - \frac{1}{1,005}} = 1\,389\,702,7 \text{ Kč.}$$

Môžeme teda uvažovať, že hodnota hlavnej výhry je iba 1 889 702,7 Kč.

Ak použijeme túto čiastku pre výpočet očakávanej hodnoty žrebu Rentier, dostaneme

$$EV(L_3) = 28,65 \text{ Kč.}$$

Poznámka. Predchádzajúce úvahy boli ešte značne zjednodušené, keďže nezahŕňali napríklad vplyv inflácie

Úloha 4. Na základe výsledkov predchádzajúcich úloh vyberte žreb, ktorý je najlepší.

Riešenie. Na základe predchádzajúcich úloh môžeme žreby porovnať podľa rôznych kritérií:

1. Podľa pravdepodobnosti výhry.

Podľa tohto kritéria je najlepší žreb Čierna perla v hodnote 100 Kč, ktorý má šancu na výhru 28,16 %, potom Čierna perla v hodnote 50 Kč so šancou 26,86 % a najhorší je žreb Rentier so šancou 25,9 %.

2. Podľa pravdepodobnosti skutočnej výhry.

Ak uvažíme skôr šancu, že vyhráme viac než sme zaplatili, dostaneme nasledovné iné poradie. Najlepší je žreb Rentier so šancou na výhru 13,9 %, potom žreb Čierna perla v hodnote 50 Kč so šancou 12,86 % a posledná je Čierna perla v hodnote 100 Kč so šancou na výhru 12,16 %.

3. Podľa očakávanej hodnoty.

Očakávaná hodnota žrebu Čierna perla v hodnote 50 Kč je 29 Kč. Na jednom žrebe teda priemerne stratíme 21 Kč. Podobne očakávaná hodnota žrebu Čierna perla v hodnote 100 Kč je 64 Kč, priemerne teda stratíme 36 Kč. A v prípade žrebu Rentier za 50 Kč je upravená očakávaná hodnota 28,65 Kč a teda priemerne stratíme 21,35 Kč.

Môžeme teda povedať, že (očakávateľne) sú všetky žreby stratové. Za najlepší však môžeme považovať žreb Čierna perla v hodnote 50 Kč, ktorý je stratový najmenej.

Literatúra

- Novák, J., *Střední hodnota v úlohách na střední škole*. Učitel matematiky, 2, JČMF, 2024.
- *Herní plán loterií SAZKA* [online] Dostupné z <https://static.sazka.cz/kentico-media/sazka/media/content/herni-plany/hp-sazka-od-17-7-24-komplet-sazka.pdf>, [cit. 1. 9. 2024]