

Który los na loterię jest bardziej opłacalny?

Keywords: ciągi i szeregi, prawdopodobieństwo, wartość oczekiwana, ciąg geometryczny

W życiu bardzo często spotykamy się z sytuacjami, które wiążą się z przypadkiem i prawdopodobieństwem. Wyobraźmy sobie, że stajemy przed wyborem pomiędzy kilkoma opcjami - na przykład wybierając los na loterię lub inwestując w projekt. Każdy wybór wiąże się z ryzykiem i potencjalnymi korzyściami, ale jak możemy określić, który z nich jest najkorzystniejszy? W tym miejscu do gry wkracza tak zwana *wartość oczekiwana*.

Wartość oczekiwana informuje nas o średnim wyniku, jakiego możemy się spodziewać, wybierając konkretną opcję. Pomaga nam lepiej oszacować, która opcja prawdopodobnie opłaci się w dłuższej perspektywie. Nie jest to dokładna prognoza, ale narzędzie, które pozwala nam lepiej zrozumieć ryzyko i zysk, zarówno w prostych grach, jak i w rzeczywistych decyzjach.

Rozważmy na przykład dwa losy na loterię:

- Los A: Kosztuje 10 zł i ma prawdopodobieństwo 0.1 wygrania 100 zł; w przeciwnym razie nie wygrywa nic.
- Los B: Kosztuje 10 zł i ma 0.2 prawdopodobieństwa wygrania 60 zł; w przeciwnym razie nie wygrywa nic.

W przypadku losu A oczekujemy, że jeśli kupimy 10 losów, jeden z nich wygra 100 zł, podczas gdy pozostałe dziewięć nie wygra nic. W związku z tym możemy oczekiwać, że każdy los na loterię przyniesie średni zwrot w wysokości 10 zł.

Podobnie, w przypadku losu na loterię B, spodziewamy się, że jeśli kupimy 10 losów, dwa z nich wygrają 60 zł, a osiem nie wygra nic. Możemy zatem oczekiwać, że każdy los na loterię przyniesie średni zwrot w wysokości 12 zł.

To pokazuje, że los B jest lepszą opcją.

Wartość oczekiwana

Średnia wygrana, którą właśnie obliczyliśmy, nazywana jest *wartością oczekiwaną*.

Ogólnie można powiedzieć, że dla zmiennej losowej X , która przyjmuje skończenie wiele wartości $x_1, \dots, x_k$ z prawdopodobieństwami $p_1, \dots, p_k$, obliczamy jego wartość oczekiwaną za pomocą tego wzoru:

$$EV = \sum_{i=1}^k x_i p_i.$$

Który los na loterię jest najlepszy?

Przyjrzyjmy się trzem kuponom loteryjnym. Kupon Black Pearl o wartości 50 zł, kupon Black Pearl o wartości 100 zł oraz kupon loterii Rental King o wartości 50 zł.

Struktura nagród dla kuponów loterii Black Pearl o wartości 50 zł, których jest łącznie 13 000 000, przedstawia się następująco.

Kwota nagrody (w zł)	Liczba zwycięskich kuponów
50	1 820 000
100	1 040 000
150	260 000
200	130 000
300	130 000
500	104 000
1 000	5 550
2 000	2 300
4 000	480
10 000	185
20 000	84
100 000	14
1 500 000	6
Total	3 492 619

Struktura nagród dla kuponu loterii 100 zł Black Pearl wygląda podobnie, z łączną kwotą 15{,}000{,}000\$ wyemitowanych kuponów.

Kwota nagrody (w zł)	Liczba zwycięskich kuponów
100	2 400 000
200	900 000
300	450 000
500	150 000
600	150 000
900	75 000
1 000	75 000
1 500	20 000
6 000	4 000
20 000	185
50 000	84
100 000	30
200 000	13
5 000 000	6
Total	4 224 318

Na koniec przyjrzyjmy się losowi na loterię Rental King, z łączną liczbą wyemitowanych losów w wysokości 8 000 000. Nagrody zostały przedstawione w poniższej tabeli.

Kwota nagrody (w zł)	Liczba zwycięskich kuponów
50	960 000
100	720 000
150	160 000
250	160 000
500	70 000
1 000	1 300
2 000	500
5 000	160
10 000	80
100 000	6
3 500 000	3
Total	2 072 049

Nagroda główna w wysokości 3 500 000 zł nie jest wypłacana od razu, ale składa się z nagrody natychmiastowej w wysokości 500 000 zł oraz renty w wysokości 50 000 zł przez 5 lat.

Zadanie 1. Który kupon ma największą szansę na wygraną?

Rozwiązanie. W przypadku losu o wartości 50 zł Black Pearl, istnieje 3 492 619 wygrywających losów z całkowitej liczby 13 000 000 (patrz ostatni wiersz tabeli). Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany kupon jest wygrywający można obliczyć jako

$$P(V_1) = \frac{3\,492\,619}{13\,000\,000} = 0,268633.$$

Możemy powiedzieć, że jeśli kupimy jeden los na loterię, mamy szansę na wygranie około 26,86%. Manipulując ułamkiem, możemy również zobaczyć, że szansa na zdobycie zwycięskiego losu na loterię wynosi 1 : 3,72.

Podobnie, w przypadku losu na loterię Black Pearl o wartości 100 zł otrzymujemy

$$P(V_2) = \frac{4\,224\,318}{15\,000\,000} = 0,2816212.$$

Oznacza to, że szansa na wygraną wynosi 28,16% lub 1 : 3,55.

W przypadku biletu Rental King otrzymujemy

$$P(V_3) = \frac{2\,072\,049}{8\,000\,000} = 0,259,$$

więc szansa na wygraną wynosi 25,9% lub 1 : 3,86.

Porównując poszczególne prawdopodobieństwa wygranej, okazuje się, że największą szansę na wygraną daje kupon Black Pearl o wartości 100 zł.

W tym kontekście możemy również rozważyć, co rozumiemy przez zwycięski kupon. Kupon jest zwykle uznawany za wygrywający, jeśli przynosi jakąkolwiek kwotę pieniędzy. Ale jeśli zapłaciliśmy 100 zł za bilet, to wygrana w wysokości 100 zł zwróci nam pieniądze, ale tak naprawdę nic nie wygraliśmy. Aby uzyskać prawdopodobieństwo wygrania więcej niż zapłaciliśmy, nie będziemy brać pod uwagę pierwszego rzędu

w naszych tabelach wygranych. W ten sposób otrzymujemy skorygowane prawdopodobieństwo wygranej

$$\begin{aligned}P(V_1) &= \frac{1\,672\,619}{13\,000\,000} = 0,128633, \\P(V_2) &= \frac{1\,824\,318}{15\,000\,000} = 0,1216212, \\P(V_3) &= \frac{1\,112\,049}{8\,000\,000} = 0,139.\end{aligned}$$

Widzimy, że gdy weźmiemy pod uwagę tylko losy loterii, które zwracają więcej niż koszt ich zakupu, najlepszą opcją jest los na loterię Rental King, który ma 13,9% szansy na taką wygraną.

Zadanie 2. Jaka jest oczekiwana wartość każdego losu?

Rozwiązanie. Aby obliczyć wartość oczekiwaną, z definicji musimy znać prawdopodobieństwa poszczególnych wygranych:

Kwota nagrody (w zł)	Prawdopodobieństwo wygranej
50	0,14
100	0,08
150	0,02
200	0,01
300	0,01
500	0,008
1 000	0,0004269
2 000	0,000176923
4 000	0,000036923
10 000	0,000014231
20 000	0,000006461538
100 000	0,000006461538
1 500 000	0,000000461538

Niech wartości poszczególnych wygranych będą oznaczone od n_1 do n_{13} , a odpowiadające im prawdopodobieństwa od p_1 do p_{13} . Wówczas wartość oczekiwana $EV(L_1)$ losu Czarnej Perły wynosi

$$EV(L_1) = \sum_{k=1}^{13} n_k p_k = 29 \text{ CZK.}$$

Biorąc pod uwagę sposób obliczania poszczególnych prawdopodobieństw, możemy również obliczyć wartość oczekiwaną w następujący sposób:

$$EV(L_1) = \frac{1}{13\,000\,000} (50 \cdot 1\,820\,000 + 100 \cdot 1\,040\,000 + \dots + 100\,000 \cdot 14 + 1\,500\,000 \cdot 6).$$

To podejście jest bardziej wygodne, ponieważ nie musimy obliczać prawdopodobieństwa każdej możliwej nagrody w tabeli. Dla losu Black Pearl za 100 CZK otrzymujemy wartość oczekiwaną $EV(L_2)$:

$$EV(L_2) = \frac{1}{15\,000\,000} (100 \cdot 2\,400\,000 + 200 \cdot 900\,000 + \dots + 200\,000 \cdot 13 + 5\,000\,000 \cdot 6) = 64 \text{ CZK.}$$

W przypadku losu na loterię Rental King otrzymujemy wartość oczekiwaną $EV(L_3)$:

$$EV(L_3) = \frac{1}{8\,000\,000} (50 \cdot 960\,000 + 100 \cdot 720\,000 + \dots + 100\,000 \cdot 6 + 3\,500\,000 \cdot 3) = 29,25 \text{ CZK.}$$

Uwaga.

- Loterie zazwyczaj podają całkowitą pulę nagród i liczbę losów. Wartość oczekiwana to oczywiście stosunek tych dwóch liczb.
- Podane wartości są często jeszcze niższe w rzeczywistości, ponieważ nagrody loteryjne są zazwyczaj opodatkowane.
- To samo podejście można zastosować do obliczenia oczekiwanej wartości paczki różnych gier karcianych (Pokémon, Lorcan, Magic the Gathering lub kart sportowych).

Zadanie 3. W poprzednich przykładach uznaliśmy, że główną nagrodą w loterii Rental King jest 3 500 000 zł. Ale czy jest to rzeczywista wartość nagrody, biorąc pod uwagę, że nie jest ona wypłacana od razu?

Rozwiązanie. Prosta odpowiedź brzmi: nie.

Ważne jest, aby pamiętać, że gdybyśmy otrzymali pieniądze natychmiast, moglibyśmy je zaoszczędzić lub w jakiś sposób zainwestować. Aby określić wartość 50 000 zł otrzymanych za miesiąc, możemy użyć koncepcji znanej jako *wartość bieżąca*. Korzystając z tej koncepcji, zadajemy sobie pytanie, ile pieniędzy musielibyśmy zainwestować dzisiaj, aby uzyskać pożądaną kwotę w ciągu jednego miesiąca (np. rozważane \$50\{, \}000\$). Kwotę tę nazywamy wartością bieżącą.

Załóżmy, że możemy zaoszczędzić daną kwotę P_0 przez miesiąc z miesięczną stopą procentową w wysokości 0.5%. Po miesiącu otrzymalibyśmy $P_1 = 1,005P_0$. Wartość bieżąca to zatem kwota P_0 , którą musimy zdeponować, aby P_1 wyniosło 50 000 zł, tj.

$$P_0 = \frac{50\,000}{1,005} = 49\,751,24 \text{ zł.}$$

Aby określić wartość bieżącą kwoty, którą otrzymamy za n miesięcy, zakładamy, że dana kwota będzie zdeponowana przez cały ten czas. Korzystając z procentu składanego, otrzymujemy wartość bieżącą P_0 kwoty P_n otrzymanej po n miesiącach w następujący sposób:

$$P_0 = \frac{P_n}{1,005^n}.$$

Przypomnijmy, że główna nagroda w loterii Rental King składa się z 500,000 zł i trzydziestu miesięcznych płatności w wysokości 50,000 zł. Biorąc pod uwagę miesięczną stopę procentową w wysokości 0.5 %, wartość bieżąca PV tych płatności wynosi

$$PV = \frac{50\,000}{1,005} + \frac{50\,000}{1,005^2} + \dots + \frac{50\,000}{1,005^{29}} + \frac{50\,000}{1,005^{30}}.$$

Zauważmy, że jest to suma wyrazów ciągu geometrycznego, a zatem obliczenia można znacznie skrócić.

$$PV = \frac{50\,000}{1,005} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,005}\right)^{30}}{1 - \frac{1}{1,005}} = 1\,389\,702,7 \text{ zł.}$$

W związku z tym zakładamy, że wartość głównej nagrody wynosi tylko 1 889 702,7 zł.

Gdy użyjemy tej kwoty do obliczenia oczekiwanej wartości losu na loterię Rental King, otrzymamy

$$EV(L_3) = 28,65 \text{ zł.}$$

Uwaga. Wcześniejsze rozważania były nadal bardzo uproszczone, ponieważ nie uwzględniały na przykład wpływu inflacji.

Zadanie 4. Na podstawie wyników poprzednich zadań wybierz najlepszy los na loterię.

Rozwiązanie. W oparciu o poprzednie zadania, możemy porównać kupony loteryjne według różnych kryteriów:

1. Według prawdopodobieństwa wygranej.

Zgodnie z tym kryterium, najlepszym kuponem jest kupon 100 zł Black Pearl z szansą na wygraną w wysokości 28,16 %, następnie kupon 50 zł Black Pearl z szansą na wygraną w wysokości 26,86 %, a najgorszy jest kupon Rental King z szansą na wygraną w wysokości 25,9 %.

2. Według prawdopodobieństwa rzeczywistej wygranej.

Jeśli zamiast tego weźmiemy pod uwagę szansę na wygraną więcej niż zapłaciliśmy, otrzymamy inny ranking. Najlepszy jest kupon Rental King z szansą na wygraną w wysokości 13,9 %, następnie kupon 50 zł Black Pearl z szansą na wygraną w wysokości 12,86 % a ostatni jest kupon 100 zł Black Pearl z szansą na wygraną w wysokości 12,16 %.

3. Według wartości oczekiwanej.

Oczekiwana wartość losu na Czarną Perłę o wartości 50 zł wynosi 29 zł. Średnio tracimy 21 zł kupując jeden bilet. Analogicznie, oczekiwana wartość losu na Czarną Perłę o wartości 100 zł wynosi 64 zł. Średnio tracimy 36 zł. W przypadku kuponu Rental King o wartości 50 zł skorygowana wartość oczekiwana wynosi 28,65 zł, więc średnio tracimy 21,35 zł.

Możemy zatem powiedzieć, że zgodnie z oczekiwaniami, wszystkie losy przynoszą stratę. Jednak los Black Pearl o wartości 50 zł można uznać za najlepszy, ponieważ przynosi najmniejszą stratę.

Literatura

- Novák, J., *Střední hodnota v úlohách na střední škole*. Učitel matematiky, 2, JČMF, 2024.
- *Herní plán loterií SAZKA* [online] Dostępne na <https://static.sazka.cz/kentico-media/sazka/media/content/herni-plany/hp-sazka-od-17-7-24-komplet-sazka.pdf>, [cit. 1. 9. 2024]