

Optimización

Keywords: geometría analítica, optimización, ecuación general de una recta, ecuación general de un plano

Programación lineal

La programación lineal es un método matemático utilizado para encontrar la mejor solución a un problema concreto. Es una técnica que se centra en maximizar o minimizar una función lineal bajo ciertas restricciones, que también se expresan como ecuaciones o inecuaciones lineales.

Esta área no empezó a atraer la atención de los matemáticos hasta después de la Primera Guerra Mundial. El primero de ellos fue Lenoid Kantorovich, quien, sin embargo, tuvo que abandonar este trabajo debido a la represión gubernamental de la época (y, posteriormente, al temor por su vida). Porque en la Unión Soviética, con su economía controlada de forma centralizada, no era buena idea optimizar los procesos de producción (por ejemplo, consiguió aumentar la eficacia de la producción hasta el 94 % en una fábrica, sólo para que le dijeran que todas las fábricas tenían que aumentar su eficacia de la misma manera).

El verdadero punto de inflexión en el desarrollo de la programación lineal fue la publicación del llamado algoritmo simplex para resolver estos problemas en 1947. Su autor es el matemático estadounidense George Dantzig, que empezó a trabajar en esta área durante la Segunda Guerra Mundial en un esfuerzo por optimizar ciertos procesos en el ejército de Estados Unidos. Lo llamaron *métodos de programación con calculadoras de sobremesa*. En su primera conferencia técnica sobre el tema, habló de *programación en una estructura lineal*, que posteriormente se acortó a sólo *programación lineal*. La palabra *programación* es una reminiscencia de la terminología militar, que se refiere a la planificación o programación del entrenamiento, la logística o el despliegue de equipos.

Ilustraremos los principios con los siguientes sencillos ejemplos.

Optimización de la producción en una planta de torrefacción

Tarea 1. Berenika y Petr abrieron una nueva cafetería con torrefacción, donde empezaron a producir dos mezclas de café: de verano y exótico. La mezcla de verano se elabora con granos de café etíope dulces en un 40, % y granos de café peruano jugosos en un 60, %
La mezcla exótica se elabora con los mismos granos, pero en una proporción de 3:1 (esta vez hay más café etíope). Hay 90 kg de café etíope y 70 kg de café peruano. Un kilo de la mezcla de verano se vende por 650 CZK y un kilo de la mezcla exótica por 800 CZK. ¿Qué cantidad de mezcla deben mezclar Berenice y Peter de los granos de café disponibles para maximizar su beneficio?

Solución. Primero tenemos que matematizar todo el problema. Por lo tanto, empezamos indicando la cantidad de la mezcla de verano como x y la cantidad de la mezcla exótica como y . Independientemente de la cantidad producida de cada

mezcla, podemos expresar el beneficio z de su venta mediante la fórmula

$$z = 650x + 800y.$$

Está claro que no se puede producir una cantidad negativa, es decir, hay que pagar obligatoriamente

$$x \geq 0 \quad \text{a z\u00e1roveň} \quad y \geq 0. \quad (1)$$

Ahora bien, hay que tener en cuenta que no disponemos de una cantidad ilimitada de granos de caf\u00e9. El consumo total de caf\u00e9 et\u00edope, dadas las proporciones de mezcla de, puede expresarse como

$$0,4x + 0,75y$$

y en el caso del caf\u00e9 peruano es

$$0,6x + 0,25y.$$

Junto con la cantidad disponible obtenemos un par de condiciones

$$0,4x + 0,75y \leq 90 \quad \text{a z\u00e1roveň} \quad 0,6x + 0,25y \leq 70. \quad (2)$$

El conjunto de puntos que satisfacen las condiciones (1) y (2) se se representa en en la figura siguiente, con la recta l\u00edmite $0,4x + 0,75y = 90$ dibujada en verde y la recta $0,6x + 0,25y = 70$ dibujada en azul.

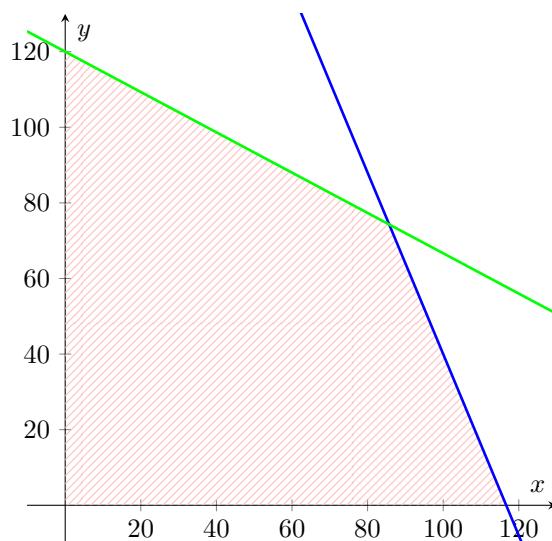


Figura 1: \u00c1rea adaptada a las condiciones

En la zona sombreada est\u00e1n todos los puntos cuyas coordenadas x y y corresponden a posibles soluciones de nuestro problema. Pero, \u00bfc\u00f3mo encontrar el punto con ganancia m\u00e1xima, es decir, el punto en el que el valor de la expresi\u00f3n $z = 650x + 800y$ es m\u00e1ximo?

Podemos darnos cuenta de que esta expresi\u00f3n es la ecuaci\u00f3n de un plano en el espacio tridimensional. Si consideramos s\u00f3lo la parte de este plano que est\u00e1 por encima de la regi\u00f3n sombreada, obtenemos un cuadril\u00e1tero en el espacio.

En lugar de dibujar una imagen espacial, dibujamos los llamados *contornos* en la imagen. Se trata de l\u00edneas con las ecuaciones

$$650x + 800y = c$$

para el c correspondiente. El significado de estas curvas de nivel es similar al de las curvas de nivel de un mapa. Sólo que en lugar de puntos de la misma altitud, nuestros contornos conectan puntos en los que obtenemos la misma ganancia.

Este procedimiento produce una imagen con contornos dibujados en marrón.

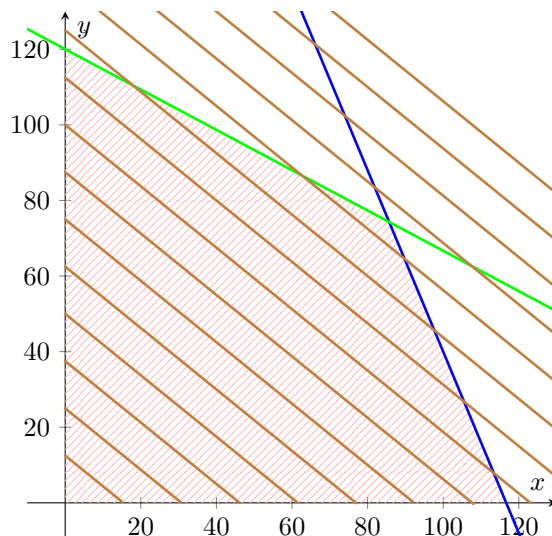


Figura 2: Área adaptada a las condiciones dadas

Pero, ¿cómo determinamos el valor adecuado de c ? Afortunadamente, no tenemos que hacer ningún cálculo complicado, sino que podemos hallarlo a partir de nuestra figura. Para $c = 0$ obtenemos una línea que pasa por el origen, y como todos los contornos difieren sólo por el valor de c , todas las líneas marrones deben ser paralelas. A partir de aquí, podemos ver en que el máximo (los contornos se mueven hacia el noreste a medida que c aumenta) estará en el punto donde se cruzan las líneas azul y verde.

Por lo tanto, las coordenadas de este punto pueden hallarse como solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$0,4x + 0,75y = 90$$

$$0,6x + 0,25y = 70.$$

Es un punto con coordenadas $\left[\frac{600}{7}, \frac{520}{7}\right]$. Sustituyendo estos valores en la expresión $z = 650x + 800y$ se obtiene el valor del beneficio máximo de aproximadamente 115 143 Kč. Esto se conseguirá, si Berenika y Petr producen $600/7$ kg, tj. přibližně 85,71 kg letní směsi a $520/7$ kg, es decir, aproximadamente 74,29 kg de la mezcla exótica.

Nota. El hecho de que la solución haya salido en la intersección de dos líneas límite no es una coincidencia. Para estos problemas, en los que todas las funciones son sólo lineales, la solución está siempre en uno de los vértices del polígono (si existe) que define todos los puntos admisibles. Esto también se puede utilizar en el caso de problemas con un número mucho mayor de incógnitas.

Basta con encontrar todos los vértices y comparar los valores funcionales. Sin embargo, este uso de la llamada fuerza bruta tiene sus trampas: puede ser computacionalmente muy exigente y requiere tener garantizada la existencia de una solución. No obstante, esta idea de fue la base del primer algoritmo muy eficiente (y aún utilizado hoy en día) para resolver este tipo de problemas. Con él, se recorren sistemáticamente los vértices (es decir, no necesariamente todos).

El mejor aparcamiento

Tarea 2. Un promotor local ha decidido comprar una fábrica de cintas de vídeo y casetes. La fábrica no tiene ningún uso hoy en día, por lo que será demolida para dar paso a un aparcamiento P+R para coches y un aparcamiento para camiones. Sin embargo, el promotor está resolviendo ahora el problema de cómo establecer la capacidad para los distintos tipos de coches. El espacio total disponible será de 480 m^2 . Una plaza de aparcamiento para un coche ocupará 12 m^2 , mientras que para un camión será de 30 m^2 .

Sin embargo, la Autoridad de Edificación también exige que la capacidad para coches personales sea al menos el doble que para camiones, pero también debe haber al menos 6 plazas de aparcamiento para camiones.

Determinar el número óptimo de plazas de aparcamiento para coches y camiones, que cumplirá todas las condiciones anteriores y al mismo tiempo maximizará el beneficio de un aparcamiento lleno, si por cada plaza de aparcamiento para coches se pagará 100 CZK y por camiones 400 CZK.

Solución. Podemos proceder de forma similar al ejemplo anterior, pero teniendo en cuenta que esta vez el número de plazas de aparcamiento debe ser entero. Si designamos como x el número de plazas de aparcamiento para coches y como y el número de plazas de aparcamiento para camiones, entonces nuestro objetivo es maximizar el beneficio z dado por

$$z = 100x + 400y.$$

Además, de estas condiciones se derivan las siguientes limitaciones.

Condición	Justificación
$y \geq 6$	requisito de número mínimo de camiones
$2y \leq x$	requisito de tipos de plazas de aparcamiento
$12x + 30y \leq 480$	capacidad de suelo disponible
$x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	los números deben ser números naturales o eventualmente cero

El conjunto que satisface todas estas condiciones se representa en la figura siguiente. Se trazan las líneas $y = 6$ (en verde), $2y = x$ (en marrón), $12x + 30y = 480$ (en azul) y los contornos $100x + 400y = c$ para distintos valores c (en rojo). Cuanto mayor es c , más “arriba a la derecha” están los contornos.

En rosa se dibuja un polígono que cumple todas las condiciones menos la última. Los puntos negros son entonces todos los puntos que también satisfacen esta condición, es decir, que sólo tienen números naturales como coordenadas (el cero está descartado).

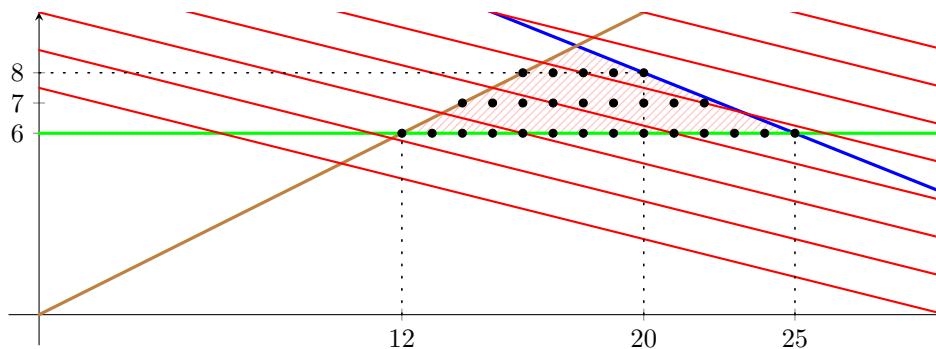


Figura 3: Área adaptada a las condiciones

La figura muestra que el máximo estará en que sea el punto superior derecho. Pero, ¿cuáles son sus coordenadas?

Como es la intersección de las líneas azul y marrón, podemos determinar sus coordenadas resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2y &= x \\ 12x + 30y &= 480 \end{aligned}$$

Su solución es el par $[160/9, 80/9]$, pero no es entero.

Si observamos detenidamente la figura y tenemos en cuenta la dirección podemos estimar que el máximo que buscamos se obtiene para $y = 8$. Al mismo tiempo, vemos que el punto negro con este valor se encuentra sobre la recta azul. Así, tras introducir $y = 8$ en la ecuación de esta recta, obtenemos $x = 20$.

Por tanto, el beneficio máximo de 5200 CZK se alcanzará en caso en el que se construyan 20 de plazas de aparcamiento para coches y 8 de plazas de aparcamiento para camiones.

Como comprobación, podemos, por supuesto, determinar todos los puntos enteros que satisfacen las restricciones y verificar que ninguno de ellos tiene un valor de $100x + 400y$ mayor que o igual a 5200.