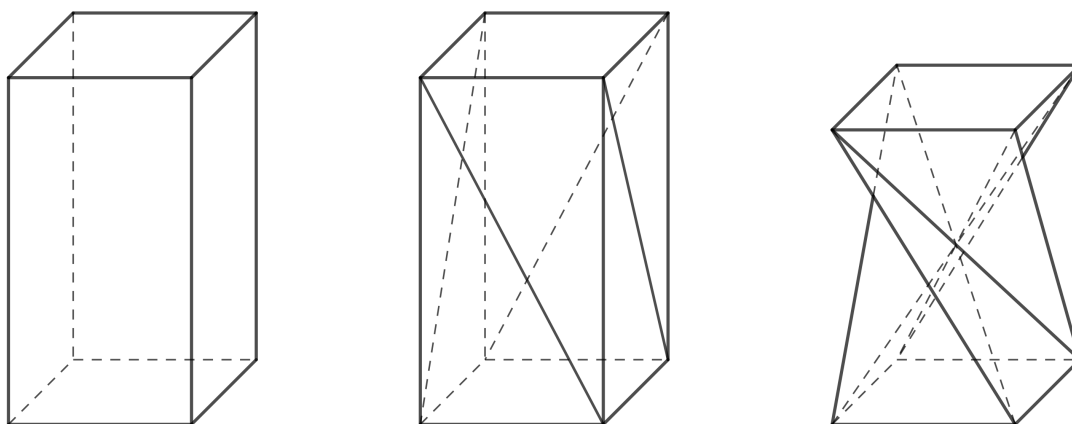


Zborcený hranol

Keywords: geometrie v prostoru, Pythagorova věta, stereometrie, trigonometrie, zborcený hranol

Jak vytvořit zborcený hranol z kolmého čtyřbokého hranolu

V designu nábytku se objevuje tvar, který je zajímavý i z geometrického hlediska. Lze ho vytvořit z pravidelného čtyřbokého hranolu rozdělením každé boční stěny na dva trojúhelníky pomocí jedné z úhlopříček a pootočením horní podstavy o 90° tak, jak je to znázorněno na Obrázku 1. Při zachování délek hran a úhlopříček současně dochází ke změně výšky hranolu. Výsledný tvar je speciálním případem tzv. *zborceného hranolu* (v angličtině *twisted prism*).



Obrázek 1: Transformace pravidelného čtyřbokého hranolu na jeho zborcenou variantu při zachování délek hran

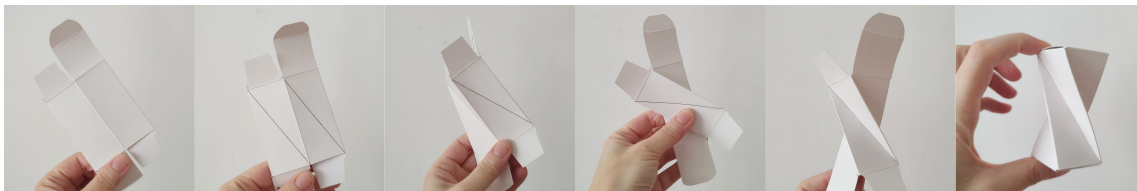
Zkusme si tento tvar vytvořit třeba z krabičky od dětského sirupu nebo očních kapek. Aby vše fungovalo je nutné, aby víčka krabičky (horní a dolní podstava hranolu) byla čtvercová a daly se nějakým způsobem odklopit nebo rozložit. K vytvoření zborceného hranolu je třeba trochu praxe a zručnosti, protože ono pootočení o 90° nelze provést v praxi tak jednoduše.

Můžeme použít následující postup.

- Odklopíme víčka krabičky a krabičku složíme do roviny (dvě boční stěny nahoře, dvě boční stěny dole).
- Všechny boční stěny rozdělíme úhlopříčkami v jednom směru tak, jak je to na obrázku. Snažíme se v papíru vytvořit rýhy, v nichž půjde papír přehnout.

Results matter!

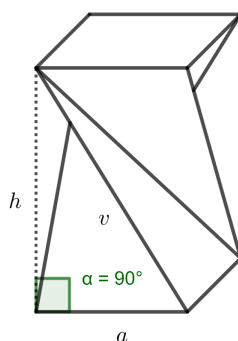
- Všechny vzniklé úhlopříčky prolomíme mírně směrem dovnitř.
- Provedeme překřížení. Spodní část přidržíme lehce jednou rukou, vrchní část vezmeme, nadzvedneme a přesuneme směrem doleva.
- Nyní z roviny rozložíme krabíčku do prostoru. Tento krok chce trochu cviku. Můžeme to udělat tak, že v místě, kde leží všechny označené úhlopříčky nad sebou, přitlačíme krabíčku dvěma prsty proti sobě. Současně se snažíme druhou rukou rozložit horní nebo dolní část krabíčky do prostoru.
- Pokud se vám předchozí krok podařil, zbývá už jen zavřít víčka krabíčky a máte hotovo. Gratuluji!



Obrázek 2: Postup tvorby zborceného hranolu z krabíčky

Úloha 1. Chceme vytvořit stoličku ve tvaru zborceného hranolu a máme k dispozici několik vhodných kartonových krabic. Tyto krabice mají stejné čtvercové podstavy o délce hrany 40 cm, ale různé výšky. Pro sezení máme odzkoušené, že nám vyhovuje výška stoličky 50 cm. Jaká výška krabice je ideální pro výrobu stoličky ve tvaru čtyřbokého zborceného hranolu o výšce 50 cm? Délka hrany podstavy je $a = 40$ cm.

Řešení. Původní boční hrana hranolu o délce v , výška židličky h a hrana dolní podstavy a tvoří pravoúhlý trojúhelník. Hrana a je kolmým průmětem hrany v do roviny dolní podstavy (viz obrázek).



Obrázek 3: Pravoúhlý trojúhelník

Podle Pythagorovy věty tedy platí

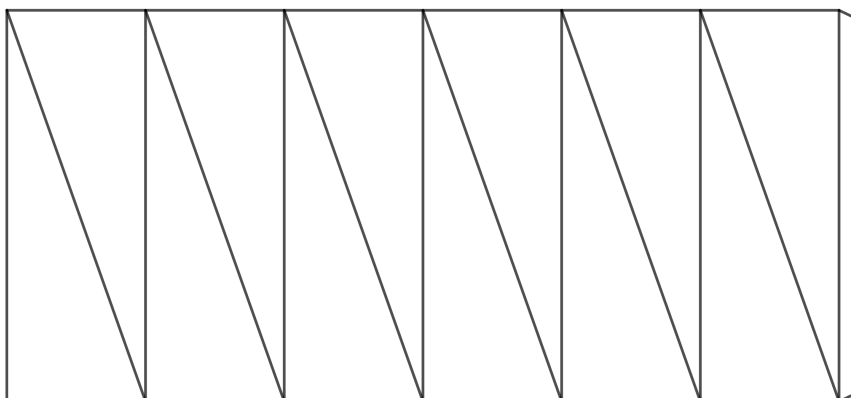
$$v = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{50^2 + 40^2} \doteq 64 \text{ cm.}$$

Kartonová krabice by v ideálním případě měla být vysoká přibližně 64 cm.

Další varianty zborčených hranolů

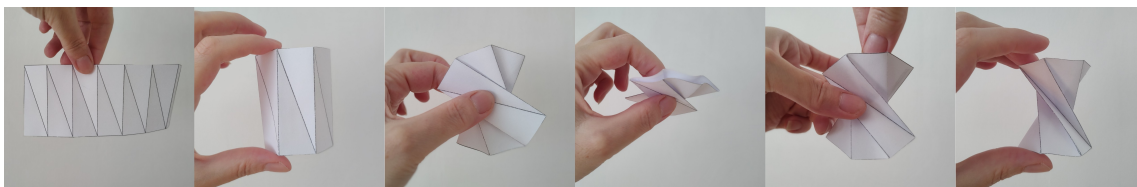
Šlo by obdobný tvar vytvořit i z kolmých hranolů, jejichž podstava by byl jiný pravidelný n -úhelník? Odpověď zní ano. Postup uvedený výše (pro tvorbu zborčeného hranolu z papíru) je však možné aplikovat pouze pro sudá n .

V následující úloze se budeme zabývat tvorbou šestibokého zborčeného hranolu. Rozmyslete si nejdříve, o kolik stupňů se tomto případě horní podstava pootočí. Pokud prostorová představivost selhává, vytvořte si model. Pro jednoduchost stačí pracovat se sítí pláště hranolu. Na obrázku níže je taková síť již připravená ke slepení (ideální je tvrdší papír).



Obrázek 4: Síť pláště šestibokého zborčeného hranolu

Před slepením vytvořte ohyby v hranách a úhlopříčkách. Ve hranách směrem nahoru, v úhlopříčkách směrem dolů. Po slepení postupujte podle obrázku.

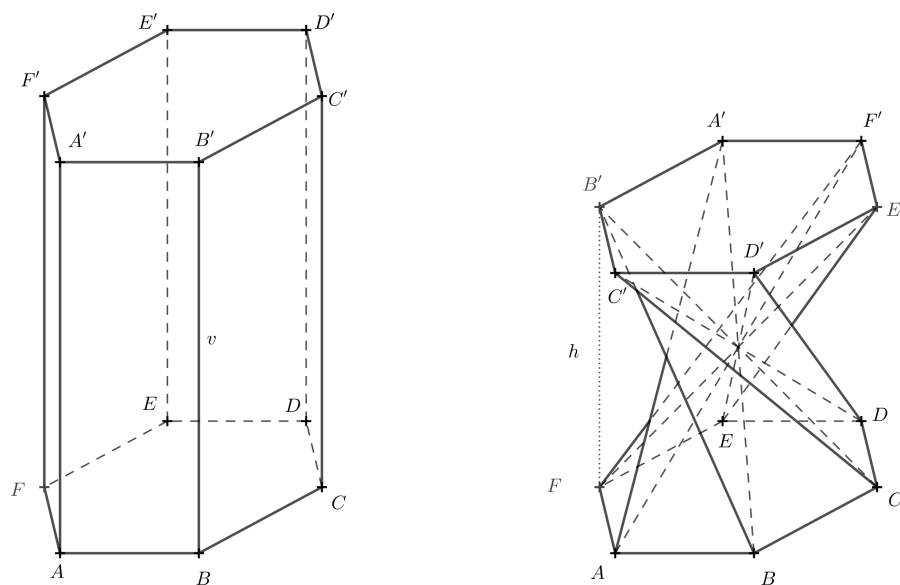


Obrázek 5: Postup pro tvorbu šestibokého zborčeného hranolu

Úloha 2. Jak závisí výška h šestibokého zborčeného hranolu (který vznikne z pravidelného šestibokého hranolu) na výšce původního hranolu v a na délce hrany dolní podstavy a ?

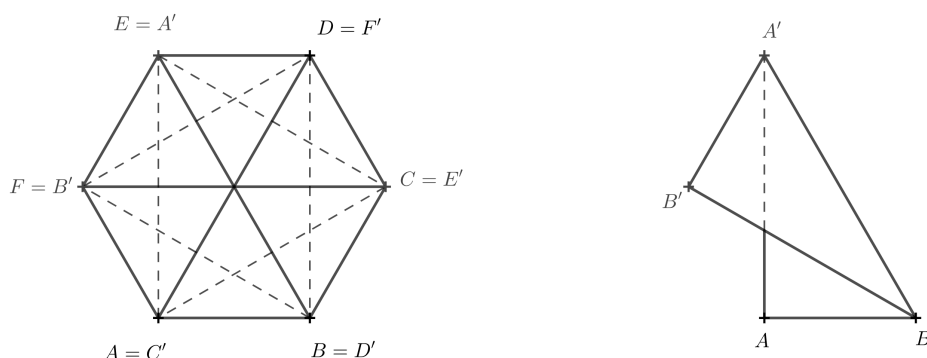
Results matter!

Řešení. K výpočtu je třeba znát úhel o který se jedna podstava pootočí vzhledem k druhé. Ten lze určit z modelu popsaného výše. Následující prostorový obrázek úhel rotace prozrazuje.



Obrázek 6: Vznik zborceného hranolu z pravidelného šestibokého hranolu

Pokud je pro někoho trojrozměrný obrázek nepřehledný, může si představit, jak těleso vypadá při pohledu shora. Horní podstavu budeme brát nyní jako průhlednou. Úsečky, které byly úhlopříčkami ve stěnách původního hranolu, se protínají v jednom bodě a při pohledu shora dělí šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$ na šest rovnostranných trojúhelníků. Zaměříme se na úsečku $A'B$, která byla úhlopříčkou ve stěně $ABB'A'$.



Obrázek 7: Vlevo pohled shora na šestiboký zborcený hranol (horní podstava průhledná). Vpravo stěna $ABB'A'$ po zborcení

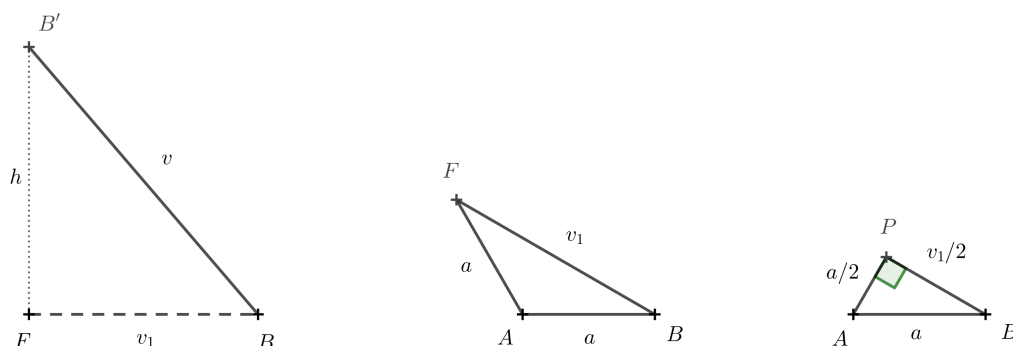
Aby tato úsečka procházela středem, musí být $A' = E$, protože bod E je naproti bodu B . Ostatní vrcholy doplníme postupně podle abecedy ve stejném směru, v jakém jsou body označeny v dolní podstavě, tj. proti směru hodinových ručiček.

Nyní je už jasné, že se horní podstava potočila vzhledem ke spodní podstavě o 120° . Díky tomu víme, že hrana BB' leží nad hranou BF a úsečka BF je kolmým průmětem úsečky BB' .

Délka hrany BB' je v , délku BF označme v_1 . Výška tělesa h je rovna délce úsečky $B'F$. Body F , B a B' tvoří pravoúhlý trojúhelník. Pomocí Pythagorovy věty dostáváme pro výšku vztah

$$h = \sqrt{v^2 - v_1^2}.$$

Zbývá určit v_1 . K tomu použijeme trojúhelník ABF .



Obrázek 8: Pravoúhlý trojúhelník

Postupovat můžeme opět pomocí Pythagorovy věty. K vytvoření pravoúhlého trojúhelníka stačí bodem A vést výšku na stranu AF . Patu této výšky označíme P . Délka této výšky je $\frac{a}{2}$, protože trojúhelník ABP je polovina rovnostranného trojúhelníka o straně a . Platí

$$\frac{v_1}{2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

a odtud

$$v_1 = a\sqrt{3}.$$

Toto vyjádření nyní můžeme dosadit do vztahu pro h . Tím dostáváme

$$h = \sqrt{v^2 - (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{v^2 - 3a^2},$$

což je hledané vyjádření výšky šestibokého zborceného hranolu pomocí v a a .

Úloha 3. Jaká je omezující podmínka pro vznik modelů z předchozích dvou úloh?

Řešení. V Úloze 1 musí být v větší než a . Pokud by platila rovnost $v = a$, potom by v pravoúhlém trojúhelníku byla přepona stejně dlouhá jako odvěsna a zbylá odvěsna by měla nulovou délku. Výška zborceného hranolu by tedy byla nulová a hranol by se složil do roviny. Úhlopříčky původního hranolu by se stále protínaly v jednom bodě.

V Úloze 2 by obdobně muselo platit $v > |AE|$, tedy $v > \sqrt{3}a$. Pro $v = \sqrt{3}a$ by zborcený hranol měl opět nulovou výšku a složil by se do roviny.

Postup pro liché n

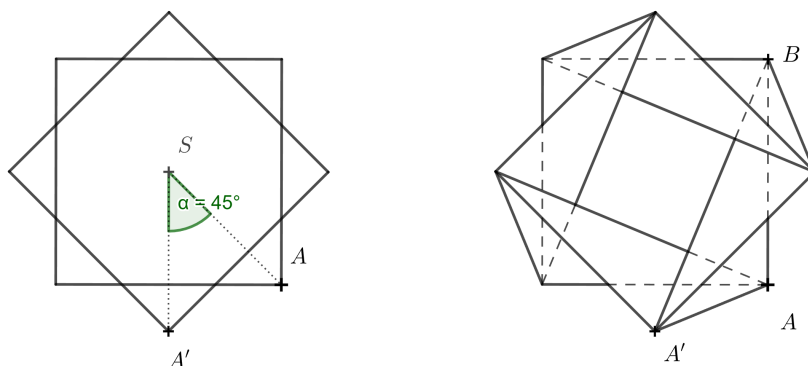
Už bylo zmíněno, že pro liché n nelze postupovat tak, jak bylo uvedeno výše. Rozdíl je ale pouze v tom, že po vytvoření sítě pláště není vhodné lepit spoj v boční hraně předtím než vytvoříme požadovaný tvar. Nejdříve síť upravíme do tvaru zborceného hranolu a teprve poté slepíme boční hranu.

Postup pro jiný úhel otočení

Co kdybychom chtěli vyrobit tvar podobný tomu z prvního příkladu, ale použít ho jako vázičku na suché květiny nebo stojan na tužky? Nevyhovuje nám v tom případě, že se 4 hrany zborceného hranolu (bývalé úhlopříčky stěn pravidelného čtyřbokého hranolu) uprostřed hranolu protínají. Chceme, aby uvnitř vznikl volný prostor. Proto potřebujeme zmenšit úhel rotace jedné podstavy vzhledem k druhé.

Úloha 4. Sestrojte síť vázy tvaru zborceného hranolu, jestliže je dána výška vázy $h = 110$ mm, délka hrany čtvercové podstavy $a = 65$ mm a úhel rotace horní hrany vázy oproti dolní podstavě je $\alpha = 45^\circ$. Tentokrát úlohu řešte konstrukčně, tedy pomocí pravítka a kružítka.

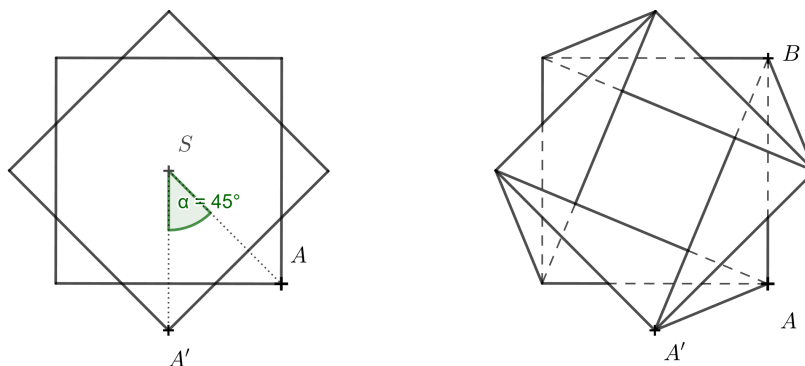
Nápověda. Na obrázku vlevo je pohled shora na dolní podstavu a na horní podstavu pootočenou o 45° . Napravo jsou znázorněny i všechny hrany vzniklého objektu. Kreslit všechny hrany není třeba, pro konstrukci je důležitá spojnice AA' a BA' . Je třeba si také uvědomit, že při pohledu shora pro kolmý průmět A_1 bodu A' do roviny dolní podstavy platí $A_1 = A'$.



Obrázek 9: Pohled shora na vázu

Ze zadání navíc víme, že výška vázy je 110 mm, tedy $|AA_1| = 110$ mm. Z pravoúhlého trojúhelníka A_1AA' můžeme určit skutečnou délku hrany AA' . Obdobně můžeme určit délku hrany BA' pomocí konstrukce pravoúhlého trojúhelníka A_1BA' . Poté známe všechny délky hran potřebné pro narážování

sítě vázy.



Obrázek 10: Pohled shora na vázu