

Zvedavý skladník

Keywords: rovnice a nerovnice, systavy lineárných rovnic, zaokružovanie

Pri riešení čisto matematických úloh dostávame presné výsledky. Avšak pri použití matematiky na riešenie problémov z reálneho sveta len zriedka dosiahneme absolútnu presnosť odpovede. Aproximácia je niekedy dôsledkom zjednodušenia reálnej situácie v našej mysli. Niekedy sú aj vstupné údaje aproximované (napr. dĺžky alebo čas vieme merať len s obmedzenou presnosťou), alebo je absolútne presný výsledok reálne nedosiahnuteľný a musíme ho zaokrúhliť.

V praxi (a v nasledujúcich úlohách) sa často používa zaokrúhľovanie na daný počet platných číslic. Kladné reálne číslo r zaokrúhľujeme na n platných číslic takto:

- Vyjadríme r v tvare $a \cdot 10^b$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a \in (1, 10)$ a $b \in \mathbb{Z}$, a následne zaokrúhlime číslo a na $n - 1$ desatinných miest podľa bežných pravidiel zaokrúhľovania.
- Napr. čísla $r = 31,258\,16$ a $s = 0,023\,123\,6$ zaokrúhlime na štyri platné číslice nasledovne:

$$\begin{aligned} r &= 31,258\,16 = 3,125\,816 \cdot 10^1 \quad \doteq \quad 3,126 \cdot 10^1 = 31,26 \\ s &= 0,023\,123\,6 = 2,312\,36 \cdot 10^{-2} \quad \doteq \quad 2,312 \cdot 10^{-2} = 0,023\,12. \end{aligned}$$

Zaokrúhľovanie vstupných údajov môže mať prekvapivé dôsledky na presnosť výsledku, napríklad pri riešení rovníc, ako uvidíme v nasledujúcej sérii úloh.

Úloha 1. Skladník vo farmaceutickom sklade dostal faktúru za dva druhy objednaných vakcín. Za dodávku 597 balení vakcíny Ixodinum proti encefalitíde a 386 balení vakcíny Nopolio proti detskej obrne bolo zaplatených spolu 401 950 Kč. Pri úvodnej kontrole však bolo zistené, že 86 balení Ixodinum a 19 balení Nopolio bolo expirovaných a museli byť vrátené. Za expirované lieky bolo vrátených spolu 39 600 Kč.

Zo zvedavosti si skladník chce vypočítať nákupnú cenu jedného balenia oboch vakcín. Nemá však po ruke kalkulačku ani mobil, a preto sa uspokojí s približným riešením. Všetky údaje, ktoré pozná, pred výpočtom zaokrúhli na jednu platnú číslicu.

O koľko sa jeho výsledok bude líšiť od skutočnej nákupnej ceny? Pre oba druhy vakcín určte absolútny rozdiel medzi vypočítanou a skutočnou cenou, ako aj relatívnu chybu vyjadrenú v percentách.

Riešenie. Najskôr vyriešme úlohu bez zaokrúhľovania. Nech x je cena za balenie Ixodinum a y cena za balenie Nopolio. Zadané smeruje k zostaveniu sústavy dvoch lineárných rovníc s dvoma neznámymi

$$\begin{aligned} 597x + 386y &= 401\,950 \\ 86x + 19y &= 39\,600, \end{aligned}$$

ktorej riešením je skutočná nákupná cena balenia Ixodinum 350 Kč a balenia Nopolio 500 Kč.

Po zaokrúhlení koeficientov na jednu platnú číslicu riešime sústavu

$$\begin{aligned} 600x' + 400y' &= 400\,000 \\ 90x' + 20y' &= 40\,000. \end{aligned}$$

Riešením je dvojica $x' = \frac{1000}{3} \doteq 333$ a $y' = 500$. Máme teda skutočnú cenu lieku a odhad ceny podľa skladníka. Vypočítajme aj relatívnu chybu ceny spôsobenú zaokrúhľovaním. Relatívna chyba je absolútna chyba (absolútna hodnota rozdielu cien) delená skutočnou cenou za balenie. Výsledky zhrnieme v tabuľke:

vakcína	skutočná cena	skladníkov odhad ceny	relatívna chyba
Ixodinum	350 Kč	333 Kč	$\frac{350-333}{350} = 4,9\%$
Nopolio	500 Kč	500 Kč	$\frac{500-500}{500} = 0\%$

Úloha 2. Po niekoľkých mesiacoch dorazila do skladu ďalšia dodávka, a to 504 balení vakcíny Antiflu proti chrípke a 81 balení vakcíny Kontradift proti záškrtu. Za túto dodávku bolo zaplatených 198 900 Kč. Pri úvodnej kontrole bolo zistené, že 98 balení Antiflu a 18 balení Kontradift bolo expirovaných. Za expirované balenia bolo vrátených spolu 40 700 Kč.

Skladník postup zopakoval a približnú cenu oboch liekov vypočítal z hlavy. Tentokrát ho však výsledok prekvapil. Čím bol prekvapený a o koľko sa jeho výsledok líšil od skutočných cien?

Riešenie. Úlohu riešime rovnako ako predtým, tentoraz označme x cenu jedného balenia Antiflu a y cenu jedného balenia Kontradift. Skutočné ceny sú riešením sústavy

$$\begin{aligned} 504x + 81y &= 198\,900 \\ 98x + 18y &= 40\,700, \end{aligned}$$

kde dostaneme $x = 250$ a $y = 900$.

Pri zaokrúhlení koeficientov riešime sústavu

$$\begin{aligned} 500x' + 80y' &= 200\,000 \\ 100x' + 20y' &= 40\,000, \end{aligned}$$

ktorej riešením je $x' = 400$ a $y' = 0$. Podľa riešenia skladníka sa teda zdá, že druhá vakcína bola dodaná do skladu zadarmo, hoci v skutočnosti je takmer štyrikrát drahšia než prvá. Vypočítame relatívnu chybu a všetky hodnoty opäť uvedieme v tabuľke:

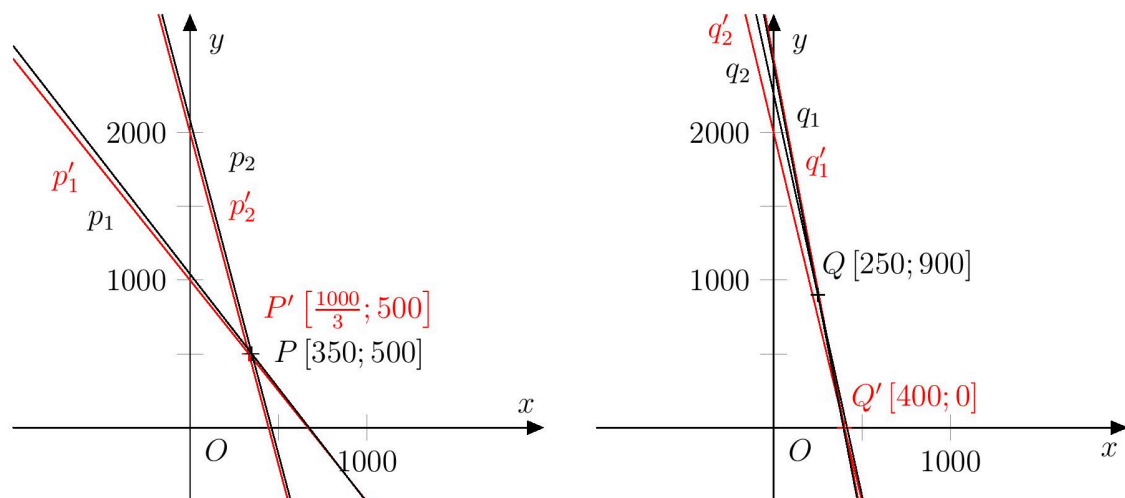
vakcína	skutočná cena	skladníkov odhad ceny	relatívna chyba
Antiflu	250 Kč	400 Kč	$\frac{400-250}{250} = 60\%$
Kontradift	900 Kč	0 Kč	$\frac{900-0}{900} = 100\%$

Úloha 3. Graficky znázorníte sústavy rovníc z predchádzajúcich dvoch úloh pomocou vhodného softvéru. Vysvetlite rozdiel v presnosti výsledkov oboch úloh porovnaním ich grafov.

Riešenie. Nech p_1, p_2 (alebo q_1, q_2) sú priamky dané rovnicami sústavy s nezaokrúhlenými koeficientmi v Úlohe 1 (alebo Úlohe 2), teda

$$\begin{aligned} p_1: 597x + 386y &= 401\,950 \\ p_2: 86x + 19y &= 39\,600 \\ q_1: 504x + 81y &= 198\,900 \\ q_2: 98x + 18y &= 40\,700. \end{aligned}$$

Priamky dané príslušnými rovnicami so zaokrúhlenými koeficientmi označme p'_1, p'_2, q'_1 a q'_2 a ďalej označme priesečníky $P \in p_1 \cap p_2, P' \in p'_1 \cap p'_2, Q \in q_1 \cap q_2$ a $Q' \in q'_1 \cap q'_2$. Grafické znázornenie dvojice sústav pre každú úlohu samostatne je na nasledujúcom obrázku.



Obr. 1: Grafické znázornenie sústav

Porovnaním obidvoch grafických znázornení vidíme, že v prípade Úlohy 2 je dvojica priamok q_1 a q_2 takmer rovnobežná. Pri zaokrúhľovaní koeficientov rovnice sa poloha priamok voči súradnicovej sústave všeobecne mení a mení sa aj poloha priesečníka. Zmena polohy priesečníka je oveľa väčšia pri takmer rovnobežných priamkach. Obrázok tiež ukazuje, prečo je druhá súradnica priesečníka (t. j. cena vakcíny Kontradift) v druhej úlohe oveľa viac ovplyvnená zaokrúhľovaním. Vzhľadom na sklon priamok q_1 a q_2 malá zmena v x -ovej súradnici priesečníka znamená veľkú zmenu v jeho y -ovej súradnici.

Literatura

- Biermann K., Grötschel M., Lutz-Westphal B. (2010). *Besser als Mathe: Moderne angewandte Mathematik aus dem MATHEON zum Mitmachen*. Berlin: Vieweg+Teubner.