

Zvědavý skladník

Keywords: rovnice a nerovnice, soustavy lineárních rovnic, zaokrouhlování

Řešením ryze matematických problémů dostáváme přesné výsledky. Používáme-li však matematiku k řešení problémů světa kolem nás, dosáhneme absolutní přesnosti odpovědi jen zřídka. Přibližnost je někdy způsobena tím, že při svých úvahách reálnou situaci zjednodušíme. Jindy jsou přibližně stanovena už vstupní data (např. měřit délky nebo čas umíme jen s omezenou přesností) nebo je absolutně přesný výsledek reálně nedosažitelný a musí se zaokrouhlit.

Často se v praxi (a také v následujících úlohách) využívá zaokrouhlování na určitý počet platných číslic. Kladné reálné číslo r zaokrouhlíme na n platných číslic následujícím způsobem:

- Vyjádříme r ve tvaru $a \cdot 10^b$, kde $a \in \mathbb{R}$, $a \in (1, 10)$ a $b \in \mathbb{Z}$, a následně zaokrouhlíme číslo a na $n - 1$ desetinných míst podle standardních pravidel pro zaokrouhlování.
- Např. čísla $r = 31,258\,16$ a $s = 0,023\,123\,6$ zaokrouhlíme na čtyři platné číslice takto:

$$\begin{aligned} r &= 31,258\,16 = 3,125\,816 \cdot 10^1 \doteq 3,126 \cdot 10^1 = 31,26 \\ s &= 0,023\,123\,6 = 2,312\,36 \cdot 10^{-2} \doteq 2,312 \cdot 10^{-2} = 0,023\,12. \end{aligned}$$

Konkrétně zaokrouhlování vstupních dat může mít překvapivé důsledky pro přesnost výsledku třeba při řešení rovnic, jak se přesvědčíme v následující sérii úloh.

Úloha 1. Vedoucí skladu léčiv obdržel fakturu za objednané dva druhy vakcín. Celkem bylo za dodávku 597 balení vakcín Ixodinum proti encefalitidě a 386 balení vakcín Nopolio proti obrně zapláceno 401 950 Kč. Při vstupní kontrole však bylo zjištěno, že 84 balení vakcíny Ixodinum a 19 balení vakcíny Nopolio je prošlých a musí být vráceny. Při reklamaci prošlých léčiv bylo vráceno 39 600 Kč. Protože je zvědavý, chce si spočítat, jaká je nákupní cena jednoho balení obou vakcín. Nemá však po ruce kalkulačku a ani telefon, a proto se spokojí s přibližným řešením. Všechny údaje, které zná, před výpočtem zaokrouhlí na jednu platnou číslici. Jak moc se bude jeho výsledek lišit od skutečné nákupní ceny? Pro oba druhy vakcín určete absolutní rozdíl vypočítané a skutečné ceny i relativní chybu v procentech.

Řešení. Vyřešíme úlohu nejprve bez zaokrouhlování. Označme x cenu za jedno balení Ixodinu a y cenu za jedno balení Nopolio. Informace v zadání vedou na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 597x + 386y &= 401\,950 \\ 86x + 19y &= 39\,600, \end{aligned}$$

jejímž řešením dostáváme skutečnou nákupní cenu jednoho balení vakcíny Ixodinum 350 Kč a cenu jednoho balení vakcíny Nopolio 500 Kč.

Po zaokrouhlení koeficientů na jednu platnou číslici řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 600x' + 400y' &= 400\,000 \\ 90x' + 20y' &= 40\,000. \end{aligned}$$

Řešením je dvojice $x' = \frac{1000}{3} \doteq 333$ a $y' = 500$. Porovnáme skutečnou cenu a skladníkův cenový odhad. Dále vypočteme relativní chybu v ceně léčiva, která vznikla zaokrouhlením. Relativní chybu určíme jako

Results matter!

podíl absolutní chyby (absolutní hodnoty rozdílu cen) a skutečné ceny balení léku. Výsledky shrneme v tabulce:

vakcína	skutečná cena	skladníkův odhad ceny	relativní chyba
Ixodinum	350 Kč	333 Kč	$\frac{350-333}{350} = 4,9 \%$
Nopolio	500 Kč	500 Kč	$\frac{500-500}{500} = 0 \%$

Úloha 2. Po pár měsících přišla do skladu jiná dodávka, a to 504 balení vakcín Antiflu proti chřipce a 81 balení vakcín Kontradift proti záškrtu. Za tuto dodávku bylo zaplacen 198 900 Kč. Při vstupní kontrole bylo zjištěno, že 98 balení Antiflu a 18 balení Kontradiftu je prošlých. Při jejich reklamaci bylo zpět vráceno 40 700 Kč.

Vedoucí skladu zopakoval svůj postup a spočítal si od ruky přibližnou nákupní cenu obou léků. Tentokrát se však nestačil divit. Z čeho vycházel jeho údiv a jak moc se jeho výsledek od skutečných cen lišil tentokrát?

Řešení. Úlohu budeme řešit stejně jako předchozí, tentokrát označíme x cenu jednoho balení Antiflu a y cenu jednoho balení Kontradiftu. Tyto skutečné ceny jsou řešením soustavy

$$504x + 81y = 198\,900$$

$$98x + 18y = 40\,700,$$

odkud dostáváme $x = 250$ a $y = 900$.

Po zaokrouhlení koeficientů řešíme soustavu

$$500x' + 80y' = 200\,000$$

$$100x' + 20y' = 40\,000,$$

jejímž řešením je $x' = 400$ a $y' = 0$. Z řešení vedoucího skladu se tedy zdá, že druhá vakcína byla do skladu dodána zadarmo, přitom je ve skutečnosti skoro čtyřikrát dražší než první. Rozdíl mezi skutečnou cenou a skladníkovým odhadem ceny i relativní chybu zaneseme opět do tabulky:

vakcína	skutečná cena	skladníkův odhad ceny	relativní chyba
Antiflu	250 Kč	400 Kč	$\frac{400-250}{250} = 60 \%$
Kontradift	900 Kč	0 Kč	$\frac{900-0}{900} = 100 \%$

Úloha 3. Soustavy z obou předchozích úloh znázorněte graficky ve vhodném softwaru. Porovnáním znázornění soustav z Úlohy 1 se znázorněním soustav z Úlohy 2 vysvětlíte rozdíl v přesnostech výsledků obou úloh.

Řešení. Označme p_1 , p_2 (resp. q_1 , q_2) jednotlivé přímky dané rovnicemi soustavy s nezaokrouhlenými koeficienty v Úloze 1 (resp. v Úloze 2), jmenovitě

$$p_1: 597x + 386y = 401\,950$$

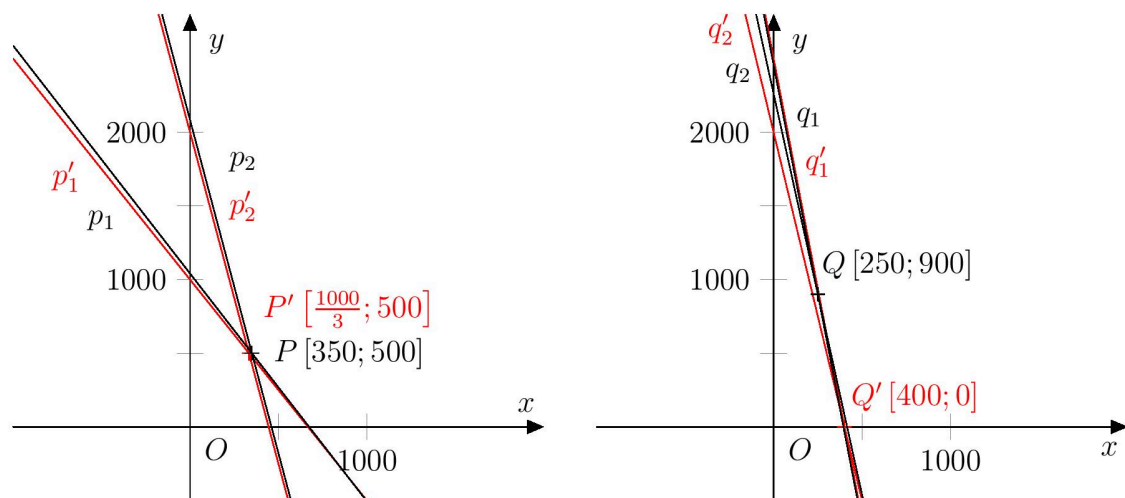
$$p_2: 86x + 19y = 39\,600$$

$$q_1: 504x + 81y = 198\,900$$

$$q_2: 98x + 18y = 40\,700.$$

Results matter!

Přímky dané odpovídajícími rovnicemi se zaokrouhlenými koeficienty označme p'_1 , p'_2 , q'_1 a q'_2 a dále označme body $P \in p_1 \cap p_2$, $P' \in p'_1 \cap p'_2$, $Q \in q_1 \cap q_2$ a $Q' \in q'_1 \cap q'_2$. Grafické znázornění dvojice soustav pro každou úlohu zvlášť je vidět na obrázku.



Obrázek 1: Grafické znázornění soustav

Porovnáním obou grafických znázornění je vidět, že v případě Úlohy 2 je přímky q_1 a q_2 jsou téměř rovnoběžné. Při zaokrouhlování koeficientů rovnice se obecně poloha přímek vůči souřadnému systému mění a tím se mění také poloha jejich průsečíku. Změna polohy průsečíku je přitom daleko větší u přímek, které jsou téměř rovnoběžné. Z obrázku je také vidět, proč bude zaokrouhlením v druhé úloze daleko více ovlivněna druhá souřadnice průsečíku (tj. cena vakcíny Kontradift). Vzhledem ke sklonu přímek q_1 a q_2 by totiž malá změna x -ové souřadnice průsečíku znamenala velkou změnu jeho y -ové souřadnice.

Literatura

- Biermann K., Grötschel M., Lutz-Westphal B. (2010). *Besser als Mathe: Moderne angewandte Mathematik aus dem MATHEON zum Mitmachen*. Berlin: Vieweg+Teubner.