

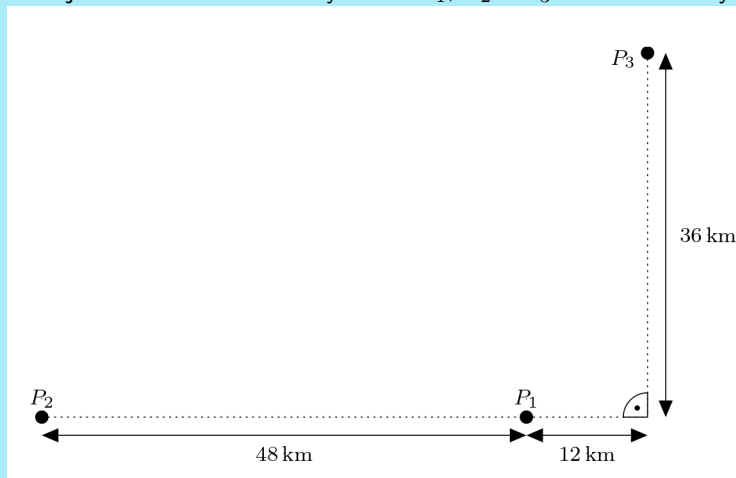
Hyperbolická navigácia

Keywords: analytická geometria, kuželočky, hyperbola

Pokrok v oblasti elektrotechniky umožnil vývoj nových navigačných systémov založených na prenose elektromagnetických vln. Príkladom takéhoto systému je námorná navigácia LORAN-C, ktorá bola vyvinutá počas druhej svetovej vojny v USA. V tomto type navigácie prijíma plavidlo synchronizovaný signál od dvojice vysielateľov. Signál od vzdialenejšieho vysielateľa je prijatý plavidlom neskôr, takže oneskorenie signálu určuje rozdiel medzi vzdialenosťami plavidla od prvého a druhého vysielateľa.

Množina bodov, ktoré majú konštantný rozdiel vo vzdialenostiach od dvoch daných pevných bodov, je hyperbola. Plavidlo sa teda nachádza na hyperbole, ktorej ohniskami sú vysielateľe, a ktorá je určená rozdielom vzdialeností plavidla od týchto vysielateľov. Oneskorenie signálu od ďalšej dvojice staníc potom určuje druhú hyperbolu, na ktorej sa plavidlo musí nachádzať. Ak sa plavidlo nachádza na oboch hyperbolách, nachádza sa v ich priesečníku.

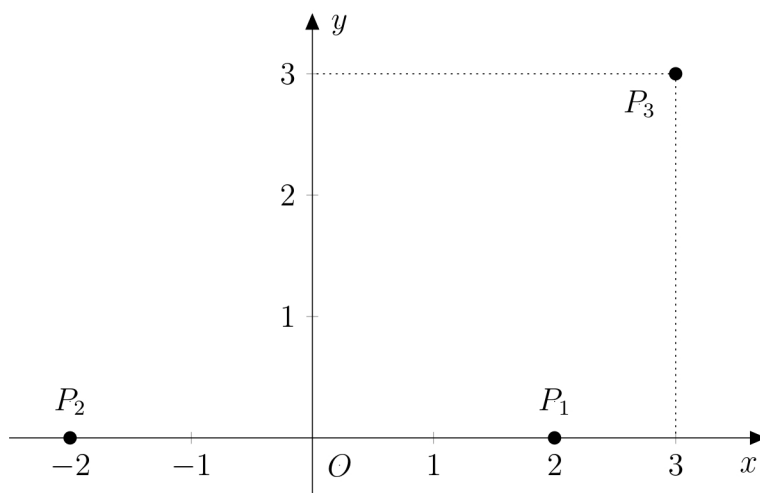
Úloha. V krajine sú umiestnené tri vysielateľe P_1 , P_2 a P_3 . Obrázok zachytáva vzdialenosti, ktoré po-



známe:

Adamova turistická navigácia pošle signál do všetkých troch prijímačov. Signál dorazí do prijímačov P_1 a P_3 v rovnakom čase a do prijímača P_2 o 80 mikrosekúnd neskôr. Kde sa Adam nachádza? Predpokladajte, že signál sa šíri rýchlosťou 300 000 km za sekundu. Určte polohu vo vhodne zvolenom súradnicovom systéme.

Riešenie. Najprv na obrázku vyberieme vhodný karteziánsky súradnicový systém. Tento výber odôvodníme nasledovne: Keďže Adam je rovnako vzdialený od prijímačov P_1 a P_3 , nachádza sa na osi úsečky P_1P_3 . Skutočnosť, že jeho signál dorazí do prijímača P_2 o 80 mikrosekúnd neskôr ako do prijímača P_1 , znamená, že Adam je o 24 km ďalej od prijímača P_2 než od prijímača P_1 . Jeho poloha je preto tiež na vetve hyperboly h s ohniskami P_1 a P_2 , kde rozdiel vzdialeností Adama od P_1 a P_2 je práve 24 km. Je výhodné umiestniť začiatok súradnicového systému do stredu úsečky P_1P_2 , aby rovnica hyperboly h mala čo najjednoduchšiu formu. Označme začiatok sústavy súradníc ako O a umiestnime ho do stredu úsečky P_1P_2 . Kladný smer osi x bude určený polpriamkou OP_1 a kladný smer osi y zvolíme tak, aby druhá súradnica bodu P_3 bola kladná. Keďže všetky dané rozmery sú násobky 12, zvolíme jednotky na oboch osiach tak, aby zodpovedali vzdialenosti 12 km. Situácia je znázornená na obrázku:



Nech A označuje neznámu polohu Adama. Vieme, že bod A leží na osi úsečky P_1P_3 . Túto os (označme ju o) vyjadríme parametricky:

$$o: X = S_{P_1P_3} + t \cdot \vec{u}_o,$$

kde $S_{P_1P_3} \left[\frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right]$ a $\vec{u}_o = (3; -1)$. Potom

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{2} + 3t \\ y &= \frac{3}{2} - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Na nájdenie rovnice hyperboly si všimnime, že body P_1 a P_2 sú ohniská hyperboly h , so stredom v bode O a excentricitou e rovnajúcou sa polovici vzdialenosti $|OP_1|$, teda $e = 2$. Ďalej, keďže rozdiel $|AP_1| - |AP_2| = 2$ je dvojnásobkom dĺžky veľkej polosi hyperboly, dĺžka veľkej polosi a je rovná 1. Dĺžku malej polosi b vypočítame dosadením do vzťahu $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$. Teraz môžeme zapísať rovnicu požadovanej hyperboly

$$h: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Bod A leží na jej pravej vetve (je bližšie k prijímaču P_1), teda jeho prvá súradnica musí byť nutne $x_A > 0$. Teraz vypočítajme súradnice priesečníkov priamky o a hyperboly h . Dosadením parametrických rovníc priamky o do rovnice hyperboly dostaneme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2} + 3t \right)^2 - \frac{\left(\frac{3}{2} - t \right)^2}{3} &= 1 \\ 3 \cdot \left(\frac{5}{2} + 3t \right)^2 - \left(\frac{3}{2} - t \right)^2 &= 3 \\ &\vdots \\ 52t^2 + 96t + 27 &= 0 \end{aligned}$$

Koreňmi tejto kvadratickej rovnice sú $t_1 = -\frac{9}{26}$ a $t_2 = -\frac{3}{2}$. Dosadíme t_1 do parametrických rovníc a dostaneme:

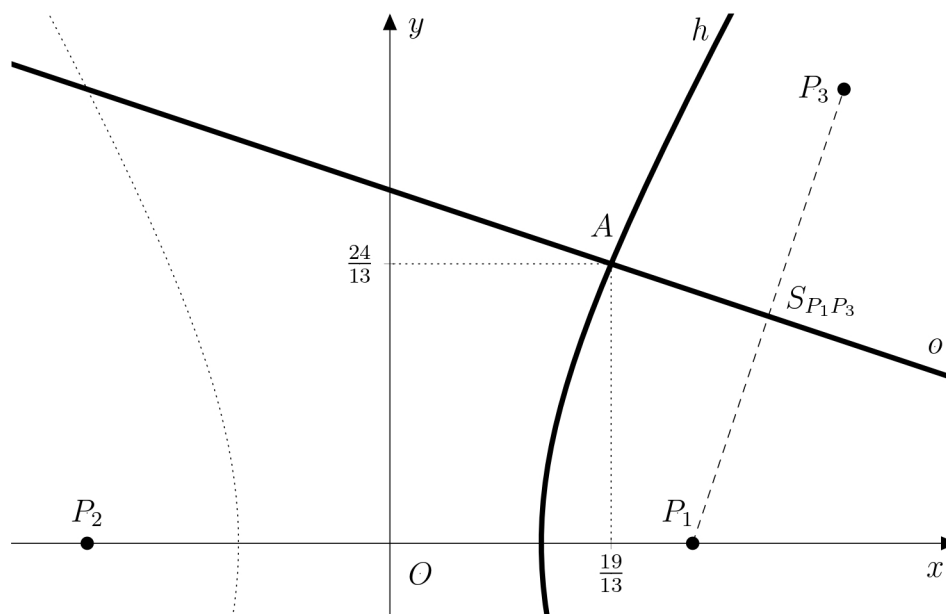
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{9}{26} \right) = \frac{19}{13} \\ y_1 &= \frac{3}{2} - \left(-\frac{9}{26} \right) = \frac{24}{13}, \end{aligned}$$

Teda $A_1 \left[\frac{19}{13}; \frac{24}{13} \right]$. Podobne, dosadením t_2 dostaneme:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = -2 \\ y_2 &= \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2} \right) = 3, \end{aligned}$$

Results matter!

Teda $A_2 \in [-2; 3]$. Avšak bod A_2 nespĺňa podmienku $x_A > 0$ (nachádza sa na druhej vetve hyperboly), takže dostávame jediná možnú polohu Adama, a to $A \left[\frac{19}{13}; \frac{24}{13} \right]$. Riešenie je znázornené na obrázku.



Obr. 1: Riešenie úlohy

Poznámka. Ak by Adam nebol rovnako vzdialený od prijímačov P_1 a P_3 , riešenie problému by znamenalo nájsť priesečník vetiev dvoch hyperbol. Takýto výpočet by však presahoval rámec stredoškolskej matematiky.

Literatúra

- Vondrák J. (2013). *Historie navigace – od kvadrantu k GNSS*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 58 (1), 11–20.