

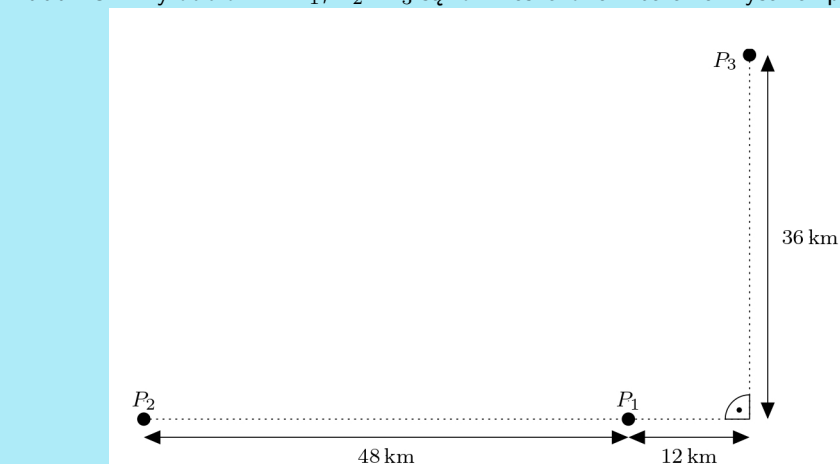
Nawigacja hiperboliczna

Keywords: geometria analityczna, przekroje analityczne, hiperbola

Postęp w dziedzinie inżynierii elektrycznej umożliwił opracowanie nowych systemów nawigacji opartych na transmisji fal elektromagnetycznych. Przykładem takiego systemu jest nawigacja morska LORAN-C, która została opracowana podczas II wojny światowej w USA. W tym typie nawigacji, statek odbiera zsynchronizowany sygnał z pary nadajników. Sygnał z bardziej oddalonego nadajnika jest odbierany przez statek później, więc opóźnienie sygnału określa różnicę między odległościami statku od pierwszego i drugiego nadajnika.

Zbiór punktów, które mają stałą różnicę odległości od dwóch punktów stałych jest hiperbolą. Zatem statek znajduje się na hiperboli, której ogniskami są nadajniki i która jest określona przez różnicę odległości statku od tych nadajników. Opóźnienie sygnału z innej pary stacji określa następnie drugą hiperbolę, na której musi znajdować się statek. Jeśli statek leży na obu hiperbolach, to leży na ich przecięciu.

Zadanie. Trzy odbiorniki P_1 , P_2 i P_3 są rozmieszczone w terenie. Rysunek przedstawia znane nam od-



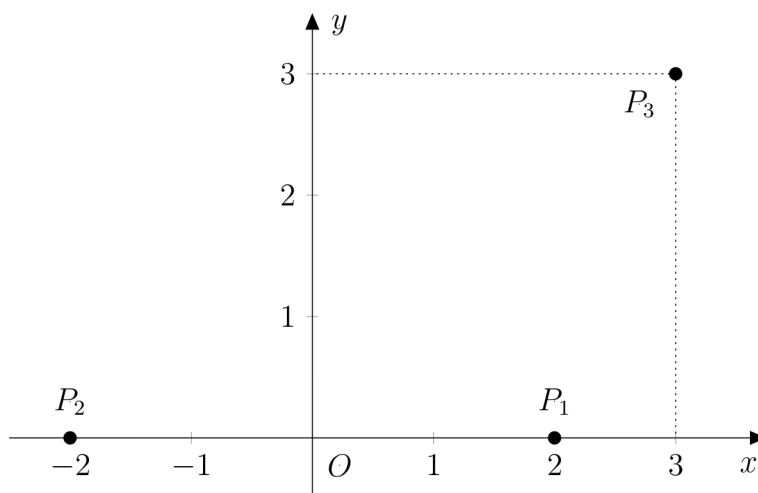
ległości:

Nawigacja turystyczna

Adama wysłał sygnał do wszystkich trzech odbiorników. Sygnał dociera do odbiorników P_1 i P_3 w tym samym czasie, a do odbiornika P_2 80 mikrosekund później. Gdzie znajduje się Adam? Załóżmy, że sygnał pokonuje 300 000 km na sekundę. Określ pozycję w odpowiednio ustalonym układzie współrzędnych.

Rozwiązanie. Najpierw na rysunku wybieramy odpowiedni kartezjański układ współrzędnych. Uzasadnimy ten wybór w następujący sposób: Ponieważ Adam znajduje się w równej odległości od odbiorników P_1 i P_3 , jest on umieszczony na osi linii P_1P_3 . Fakt, że jego sygnał dociera do odbiornika P_2 80 mikrosekund później niż do odbiornika P_1 oznacza, że Adam znajduje się 24 km dalej od odbiornika P_2 niż od odbiornika P_1 . Jego pozycja znajduje się zatem również na gałęzi hiperboli h z ogniskami P_1 i P_2 (gdzie różnica w odległościach Adama od P_1 i P_2 wynosi zaledwie 24 km). Korzystne jest umieszczenie początku układu współrzędnych w środku odcinka P_1P_2 , tak aby równanie hiperboli h miało najprostszą możliwą postać.

Oznaczmy początek układu O i umieścmy go w środku odcinka P_1P_2 . Dodatni kierunek osi x będzie wyznaczony przez półprostą OP_1 , a dodatni kierunek osi y wybierzemy tak, aby druga współrzędna punktu P_3 była dodatnia. Ponieważ wszystkie podane wymiary są wielokrotnościami 12, wybieramy jednostki na obu osiach, aby odpowiadały odległości 12 km. Sytuację ilustruje rysunek:



Rysunek 1: Wprowadzenie układu współrzędnych

Niech A oznacza nieznane położenie Adama. Wiemy, że punkt A leży na osi odcinka P_1P_3 . Wyrażamy tę oś (oznaczymy ją o) parametrycznie:

$$o: X = S_{P_1P_3} + t \cdot \vec{u}_o,$$

gdzie $S_{P_1P_3} \left[\frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right]$ i $\vec{u}_o = (3; -1)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{2} + 3t \\ y &= \frac{3}{2} - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aby znaleźć równanie hiperboli, należy zauważyć, że punkty P_1 i P_2 są ogniskami hiperboli h o środku O i mimośrodkie e równym połowie $|OP_1|$, a więc $e = 2$. Następnie, ponieważ różnica $|AP_1| - |AP_2| = 2$ jest dwa razy większa od długości głównej półosi hiperboli, długość głównej półosi a jest równa 1. Obliczamy długość mniejszej półosi b poprzez podstawienie do zależności $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$. Teraz możemy zapisać równanie wymaganej hiperboli

$$h: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Punkt A leży na jego prawej gałęzi (jest bliżej odbiornika P_1), tzn. jego pierwsza współrzędna musi koniecznie wynosić $x_A > 0$.

Obliczmy teraz współrzędne punktów przecięcia linii o i hiperboli h . Podstawiając równania parametryczne prostej o do równania hiperboli, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2} + 3t \right)^2 - \frac{\left(\frac{3}{2} - t \right)^2}{3} &= 1 \\ 3 \cdot \left(\frac{5}{2} + 3t \right)^2 - \left(\frac{3}{2} - t \right)^2 &= 3 \\ &\vdots \\ 52t^2 + 96t + 27 &= 0 \end{aligned}$$

Results matter!

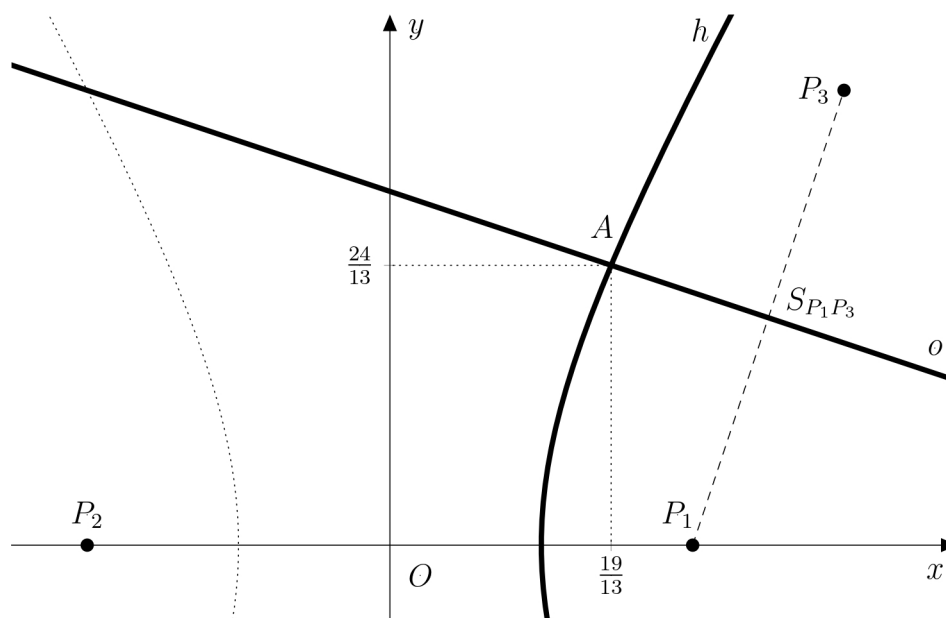
Pierwiastkami tego równania kwadratowego są $t_1 = -\frac{9}{26}$ i $t_2 = -\frac{3}{2}$. Podstawiamy t_1 do równań parametrycznych i otrzymujemy:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{9}{26}\right) = \frac{19}{13} \\y_1 &= \frac{3}{2} - \left(-\frac{9}{26}\right) = \frac{24}{13},\end{aligned}$$

czyli $A_1 \left[\frac{19}{13}; \frac{24}{13}\right]$. Analogicznie, podstawiając t_2 , otrzymujemy:

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -2 \\y_2 &= \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 3,\end{aligned}$$

i.e., $A_2 [-2; 3]$. Jednak punkt A_2 nie spełnia warunku $x_A > 0$ (leży na drugiej gałęzi hiperboli), otrzymujemy więc jedyną możliwą pozycję Adama, mianowicie $A \left[\frac{19}{13}; \frac{24}{13}\right]$. Rozwiązanie pokazano na rysunku.



Rysunek 2: Rozwiązanie zadania

Uwaga. Gdyby Adam nie był w równej odległości od odbiorników P_1 i P_3 , rozwiązaniem zadania oznaczałoby znalezienie przecięcia gałęzi dwóch hiperbol. Takie obliczenia wykraczałyby jednak poza zakres matematyki w szkole średniej.

Literatura

- Vondrák J. (2013). *Historie navigace – od kvadrantu k GNSS*. Postępy w matematyce, fizyce i astronomii, 58 (1), 11–20.