

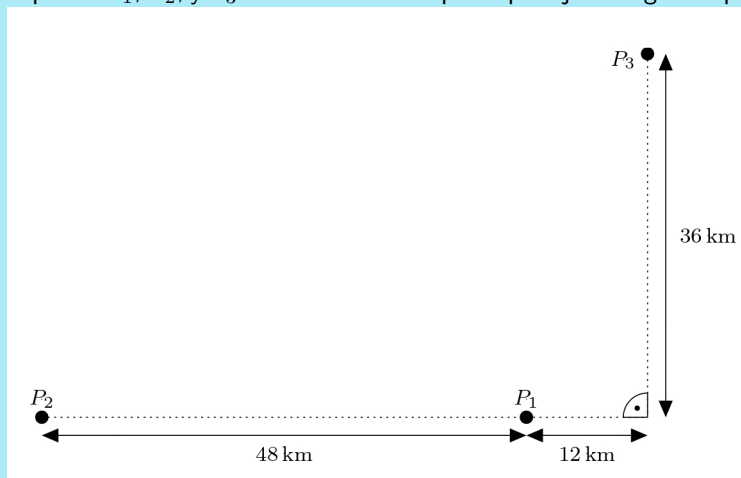
Navegación hiperbólica

Keywords: geometría analítica, sección cónica, hipérbola

Los avances en el campo de la ingeniería eléctrica permitieron el desarrollo de nuevos sistemas de navegación basados en la transmisión de ondas electromagnéticas. Un ejemplo de este tipo de sistemas es la navegación marítima LORAN-C, que fue desarrollada durante la Segunda Guerra Mundial en EEUU. En este tipo de navegación, el buque recibe una señal sincronizada de un par de transmisores. Este recibe más tarde la señal del transmisor que está más lejos, por lo que el retraso de la señal determina la diferencia entre las distancias del buque a cada transmisor.

El conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos dados es constante, se denomina hipérbola. Por tanto, el buque está localizado en una hipérbola, cuyos focos son los transmisores, y que está determinada por la diferencia de distancias del buque a dichos transmisores. El retraso de la señal de otro par de estaciones determina, entonces, la segunda hipérbola en la que debe situarse el buque. Si el buque se encuentra en ambas hipérbolas, entonces se sitúa en su intersección.

Ejercicio. Tres receptores P_1 , P_2 , y P_3 están distribuidos por el paisaje. La figura captura las distancias



que conocemos:

La navegación

turística de Adam enviará una señal a los tres receptores. La señal llega a los receptores P_1 y P_3 al mismo tiempo y al receptor P_2 80 microsegundos después. ¿Dónde se encuentra Adam? Supongamos que la señal viaja a 300 000 km por segundo. Determina la posición en un sistema de coordenadas adecuadamente establecido.

Solución. Para comenzar, en la figura, elegimos un sistema de coordenadas cartesianas adecuado. Justificamos esta elección de la siguiente manera: Como Adam equidista de los receptores P_1 y P_3 , está situado en el eje de la recta P_1P_3 . El hecho de que su señal llegue al receptor P_2 80 microsegundos más tarde que al receptor P_1 significa que Adam está 24 km más lejos del receptor P_2 que del P_1 . Entonces, su posición está también en la rama de la hipérbola h con focos P_1 y P_2 (donde la diferencia entre las distancias de Adam a P_1 y P_2 es exactamente 24 km). Conviene situar el origen del sistema de coordenadas en el centro del segmento de recta P_1P_2 para que la ecuación de la hipérbola h sea de la forma más sencilla posible.

Denotemos el origen del sistema como O y situémoslo en el centro del segmento de recta P_1P_2 . La dirección positiva del eje x vendrá determinada por la semirrecta OP_1 y elegimos la dirección positiva del eje y para que la segunda coordenada del punto P_3 sea positiva. Como todas las dimensiones dadas son múltiplos de 12, elegimos las unidades en ambos ejes correspondiendo con una distancia de 12 km.

Esta situación se ilustra en la figura:

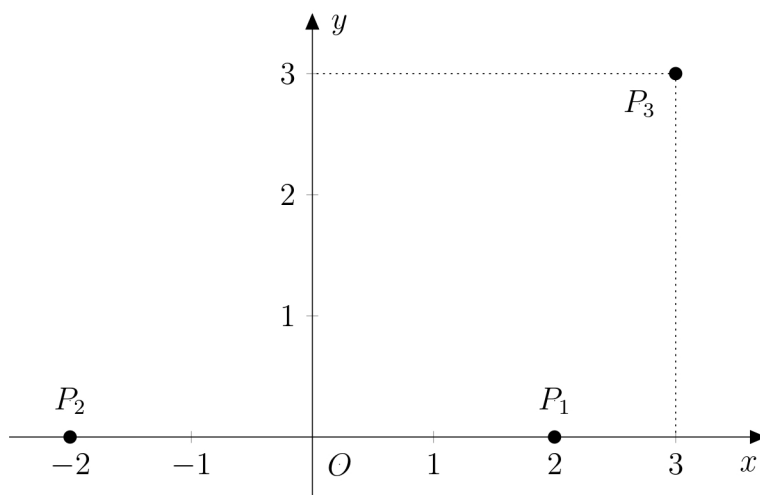


Figura 1: Introduction of coordinate system

Sea A la posición desconocida de Adam. Sabemos que el punto A se sitúa en el eje del segmento de recta P_1P_3 . Expresamos este eje (denotémoslo por o) con ecuaciones paramétricas:

$$o: X = S_{P_1P_3} + t \cdot \vec{u}_o,$$

donde $S_{P_1P_3} \left[\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right]$ y $\vec{u}_o = (3; -1)$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{2} + 3t \\ y &= \frac{3}{2} - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para hallar la ecuación de la hipérbola, obsérvese que los puntos P_1 y P_2 son los focos de la hipérbola h , con centro O y excentricidad e igual a la mitad de $|OP_1|$, luego $e = 2$. A continuación, como la diferencia $|AP_1| - |AP_2| = 2$ es el doble de la longitud del semieje mayor de la hipérbola, la longitud de dicho semieje mayor a es igual a 1. Calculamos la longitud del semieje menor b sustituyendo en la relación $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$. Ahora, podemos escribir la ecuación de la hipérbola buscada

$$h: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

El punto A se encuentra en su rama derecha (está más cerca del receptor P_1), i.e., su primera coordenada debe ser necesariamente $x_A > 0$.

Calculemos ahora las coordenadas de las intersecciones de la recta o y la hipérbola h . Sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta o en la ecuación de la hipérbola, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2} + 3t \right)^2 - \frac{\left(\frac{3}{2} - t \right)^2}{3} &= 1 \\ 3 \cdot \left(\frac{5}{2} + 3t \right)^2 - \left(\frac{3}{2} - t \right)^2 &= 3 \\ &\vdots \\ 52t^2 + 96t + 27 &= 0 \end{aligned}$$

Results matter!

Las raíces de esta ecuación cuadrática son $t_1 = -\frac{9}{26}$ y $t_2 = -\frac{3}{2}$. Sustituimos t_1 en las ecuaciones paramétricas y obtenemos:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{9}{26}\right) = \frac{19}{13} \\y_1 &= \frac{3}{2} - \left(-\frac{9}{26}\right) = \frac{24}{13},\end{aligned}$$

esto es $A_1 \left[\frac{19}{13}; \frac{24}{13}\right]$. De forma similar, sustituyendo t_2 , se obtiene:

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -2 \\y_2 &= \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 3,\end{aligned}$$

i.e., $A_2 [-2; 3]$. Sin embargo, el punto A_2 no satisface la condición $x_A > 0$ (se sitúa en la segunda rama de la hipérbola), luego llegamos a la conclusión de que la única posición posible para Adam es $A \left[\frac{19}{13}; \frac{24}{13}\right]$. La solución se muestra en la figura.

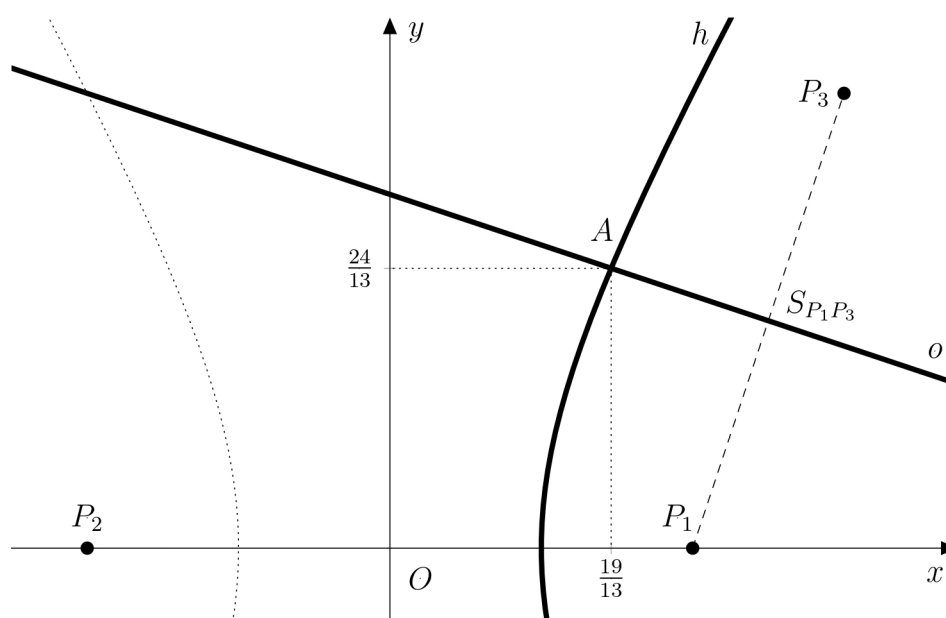


Figura 2: Exercise solution

Nota. Si Adam no equidistara de los dos receptores P_1 y P_3 , resolver el problema habría consistido en encontrar la intersección de las ramas de las dos hipérbolas. Sin embargo, ese cálculo estaría fuera del alcance de las matemáticas escolares.

Bibliografía

- Vondrák J. (2013). *Historie navigace – od kvadrantu k GNSS*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 58 (1), 11–20.