

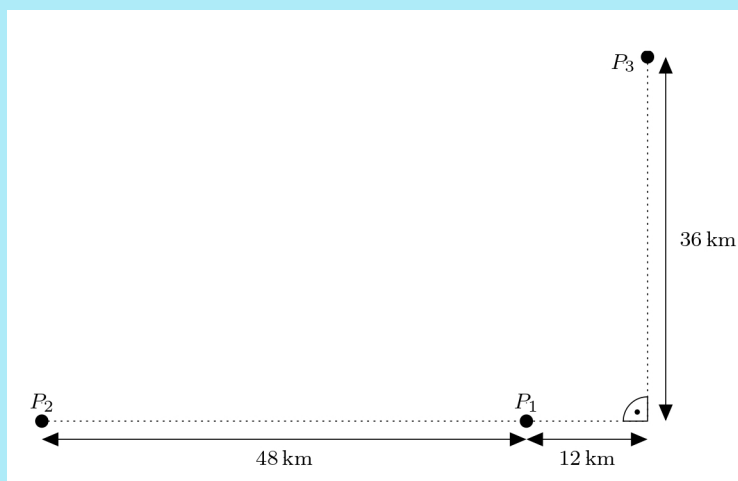
Hyperbolická navigace

Keywords: analytická geometrie, kuželosečky, hyperbola

Pokroky na poli elektrotechniky umožnily vývoj nových navigačních systémů založených na přenosu elektromagnetického vlnění. Příkladem takového systému je námořní navigace LORAN-C, která byla vyvinuta za druhé světové války v USA. U tohoto typu navigace plavidlo přijímá synchronizovaný signál z dvojice vysílačů. Signál ze vzdálenějšího vysílače je plavidlem přijat později, zpoždění signálu tedy určuje rozdíl mezi vzdálenostmi plavidla od prvního a druhého vysílače.

Množina bodů, které mají stálý rozdíl vzdáleností od dvou daných pevných bodů, je hyperbola. Víme tedy, že plavidlo se nachází na hyperbole, jejíž ohniska jsou právě vysílače, a která je určena rozdílem vzdáleností plavidla od těchto vysílačů. Zpoždění signálu z jiné dvojice stanic pak určuje druhou hyperbolu, na které plavidlo musí ležet. Leží-li plavidlo na jedné i druhé hyperbole, leží v jejich průsečíku.

Úloha. V krajině jsou rozmístěny tři přijímače P_1 , P_2 a P_3 . Známé vzdálenosti zachycuje obrázek:



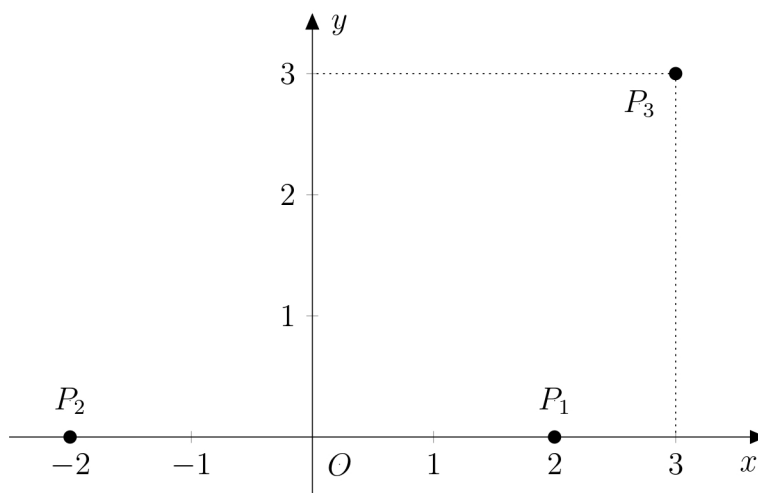
Obrázek 1: Zadání úlohy

Adamova turistická navigace vyšle signál ke všem třem přijímačům. Signál dorazí k přijímačům P_1 a P_3 ve stejnou dobu a k přijímači P_2 o 80 mikrosekund později. Určete, kde se Adam nachází. Předpokládejte, že signál urazí 300 000 km za sekundu. Polohu určete ve vhodně zavedené soustavě souřadnic.

Řešení. Nejprve v obrázku vhodně zvolíme kartézskou soustavu souřadnic. Volbu zdůvodníme takto: protože je Adam stejně vzdálen od přijímače P_1 i P_3 , nachází se jeho poloha na ose úsečky P_1P_3 . Skutečnost, že k přijímači P_2 dorazí jeho signál o 80 mikrosekund později než k přijímači P_1 znamená, že je od přijímače P_2 o 24 km dále než od přijímače P_1 . Jeho poloha se proto také nachází na větvi hyperboly h s ohnisky P_1 a P_2 (kde rozdíl vzdáleností Adama od P_1 a P_2 je roven právě 24 km). Aby měla hyperbola h co nejjednodušší rovnici je výhodné umístit počátek soustavy souřadnic do středu úsečky P_1P_2 .

Označme tedy počátek soustavy O a položme jej do středu úsečky P_1P_2 . Kladný směr osy x bude určovat polopřímka OP_1 a kladný směr osy y zvolíme tak, aby byla druhá souřadnice bodu P_3 kladná. Protože všechny zadané rozměry jsou násobky 12, jednotky na obou osách zvolíme tak, aby odpovídaly

vzdálenosti 12 km. Situaci znázorňuje obrázek:



Obrázek 2: Zavedení soustavy souřadnic

Označme neznámou polohu Adama A . Víme, že bod A leží na ose úsečky P_1P_3 , proto si tuto osu (označme ji o) vyjádříme parametricky:

$$o: X = S_{P_1P_3} + t \cdot \vec{u}_o,$$

kde $S_{P_1P_3} \left[\frac{5}{2}; \frac{3}{2} \right]$ a $\vec{u}_o = (3; -1)$. Pak

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{2} + 3t \\ y &= \frac{3}{2} - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Určeme nyní rovnici hyperboly. Jelikož jsou body P_1 a P_2 ohniska hyperboly h , je středem hyperboly bod O a její excentricita e je rovna polovině $|OP_1|$, tedy $e = 2$. Dále, protože je rozdíl $|AP_1| - |AP_2| = 2$ dvojnásobkem délky hlavní poloosy hyperboly, je délka hlavní poloosy a rovna 1. Délku vedlejší poloosy b vypočítáme dosazením do vztahu $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$. Můžeme tak napsat rovnici hledané hyperboly

$$h: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Bod A leží na její pravé větvi (je blíže přijímači P_1), tj. nutně musí být jeho první souřadnice $x_A > 0$.

Vypočítejme nyní souřadnice průsečíků přímky o a hyperboly h . Dosazením parametrických rovnic přímky do rovnice hyperboly tak dostáváme

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2} + 3t \right)^2 - \frac{\left(\frac{3}{2} - t \right)^2}{3} &= 1 \\ 3 \cdot \left(\frac{5}{2} + 3t \right)^2 - \left(\frac{3}{2} - t \right)^2 &= 3 \\ &\vdots \\ 52t^2 + 96t + 27 &= 0 \end{aligned}$$

Results matter!

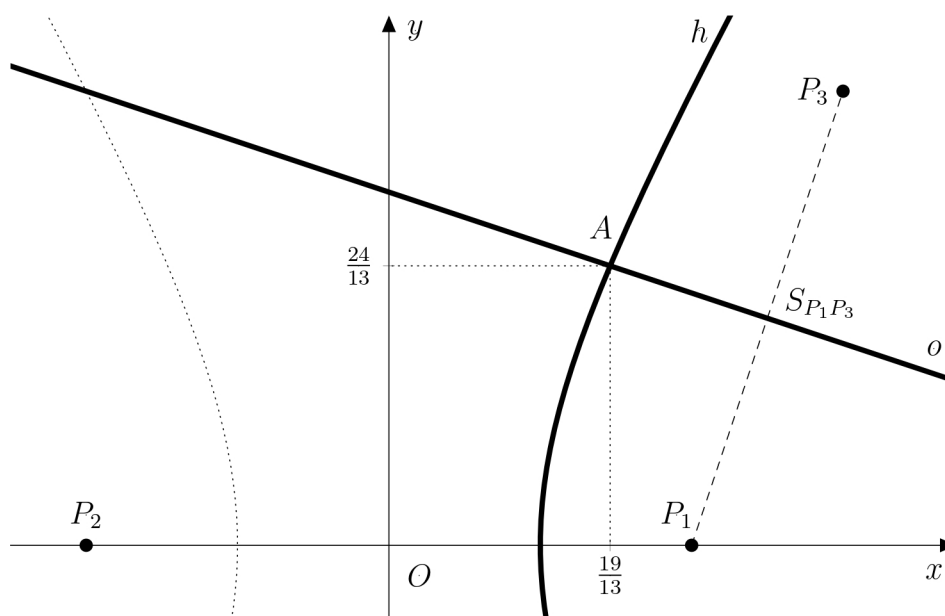
Kořeny této kvadratické rovnice jsou $t_1 = -\frac{9}{26}$ a $t_2 = -\frac{3}{2}$. Dosadíme t_1 do parametrických rovnic a dostaneme

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{9}{26}\right) = \frac{19}{13} \\y_1 &= \frac{3}{2} - \left(-\frac{9}{26}\right) = \frac{24}{13},\end{aligned}$$

tj. $A_1 \left[\frac{19}{13}; \frac{24}{13}\right]$. Podobně dosazením t_2 dostaneme

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{5}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -2 \\y_2 &= \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 3,\end{aligned}$$

tj. $A_2 [-2; 3]$. Bod A_2 však nevyhovuje podmínce $x_A > 0$ (leží na druhé větvi hyperboly), tedy dostáváme jedinou možnou Adamovu polohu, a to $A \left[\frac{19}{13}; \frac{24}{13}\right]$. Řešení je znázorněno na obrázku.



Obrázek 3: Řešení úlohy

Poznámka. Jestliže by Adam nebyl stejně vzdálený od přijímačů P_1 a P_3 , řešit úlohu by znamenalo hledat průsečíky větví dvou hyperbol. Takový výpočet by však byl nad rámec středoškolské matematiky.

Literatura

- Vondrák J. (2013). *Historie navigace – od kvadrantu k GNSS*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, 58 (1), 11–20.