© 2016–2025 MATH4U

Konečné lineární hry

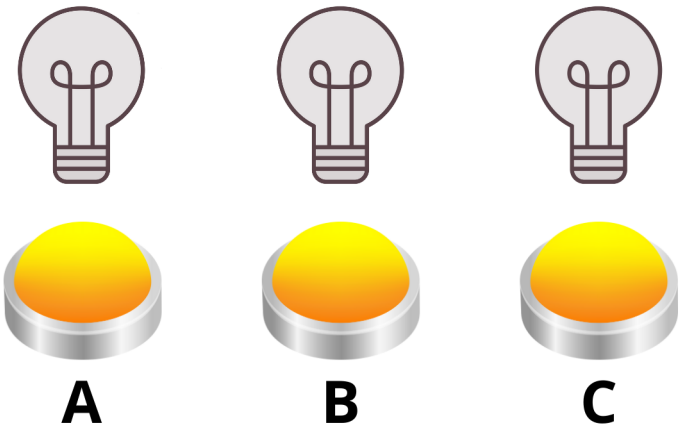
Keywords: rovnice a nerovnice, konečné lineární hry, soustavy rovnic, modulární aritmetika

Mnoho počítačových i mobilních her je založených na bázi hádanek, ve kterých je k dosažení cíle třeba provést určitou kombinaci tahů, například pomačkat některé z nabízených spínačů, aby fungoval jimi řízený stroj. Takové spínače mají navíc konečný počet stavů, v nichž se mohou nacházet: jsou buď zapnuté, nebo vypnuté. Uveďme si to na příkladu žárovky. Ta buď svítí, nebo nesvítí, a její spínač tak provádí pouze dvě akce. Když je žárovka vypnutá, prvním zmáčknutím spínače ji zapneme a druhým opět vypneme. V informatice je takových systémů, které mají omezený počet stavů, mnoho, a konkrétně hry, v nichž je potřeba uvedeným způsobem navolit optimální kombinaci tahů, díky níž dostaneme správný výsledek, se nazývají konečné lineární hry.

Hra se třemi žárovkami

Představme si síť tří žárovek, které jsou pro začátek všechny vypnuté a pod každou z nich je spínací tlačítko. Každé z tlačítek změní stav (zapne nebo vypne) žárovky nad sebou a současně žárovek s ní přímo sousedících. Pojmenujeme-li žárovky a k nim příslušná tlačítka A, B, C, potom stisknutím tlačítka A se rozsvítí žárovka A, ale protože je na kraji, společně s ní se rozsvítí už jen žárovka B. Totéž platí pro žárovku C, také má souseda jen po jedné straně, takže stisknutím tlačítka C se rozsvítí žárovky C a B. Pouze žárovka B sousedí s A i C, proto tlačítko B mění stav všech tří žárovek.

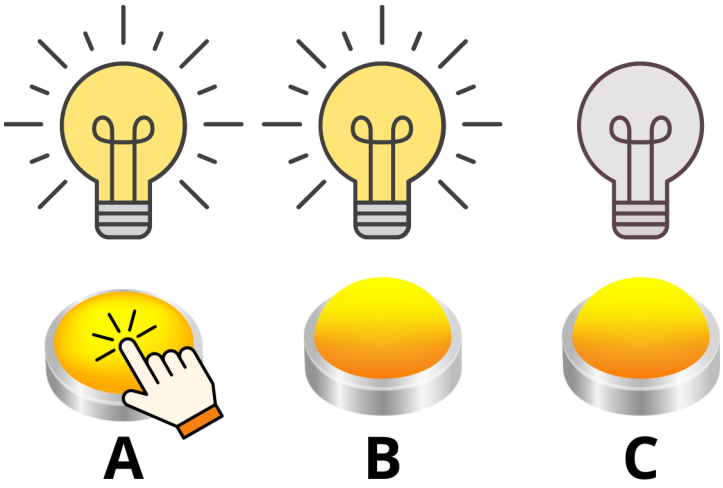
Na následujících třech obrázcích můžeme sledovat, jak by se žárovky postupně rozsvěcovaly a zhasínaly při postupném stisknutí tlačítek A a B. Důležité je si uvědomovat, že nezáleží na pořadí, v němž jsou tlačítka zmáčknuta. Můžeme si představit, že kdybychom nejprve stiskli B, rozsvítí se všechny žárovky, a následný stisk A zhasne žárovky A a B, takže zůstane svítit pouze C.



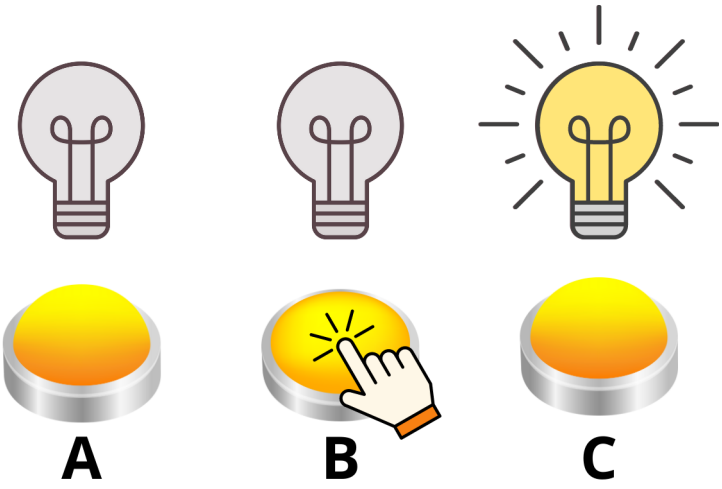
Obrázek 1: Na začátku jsou všechny žárovky zhasnuté

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

© 2016–2025 MATH4U



Obrázek 2: Stav po stisknutí tlačítka A



Obrázek 3: Následující stav po stisknutí tlačítka B

Pro následující úlohy je stěžejní pojem konečného počtu. V případě žárovek, které vždy buď svítí, nebo nesvítí, můžeme identifikovat několik situací, které se buď dějí („ano“), nebo nedějí („ne“), a protože jsme v matematice, místo slov můžeme používat značení: ano $= 1$, ne $= 0$, tj.

- žárovka svítí (1), nebo nesvítí (0),
- tlačítko danou žárovku ovládá (1), nebo na ni nemá vliv (0),
- tlačítko zmáčkneme (1), nebo jej nevyužijeme (0).

V tomto označení navíc platí $1 + 1 = 0$ nebo také $2k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, a současně $1 = -1$. V případě žárovek totiž platí, že když dvakrát zmáčkneme stejné tlačítko, příslušnou žárovku to rozsvítí a zase

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

© 2016–2025 MATH4U

zhasne (nebo naopak), takže se dostane do původního stavu a vychází to nastejno, jako kdybychom toto tlačítko nezmáčkli vůbec.

Vliv jednotlivých tlačítek na všechny žárovky můžeme zapsat vektorově. Vektory **a**, **b**, **c** budou popisovat činnost tlačítek A, B, C. Každá souřadnice vektoru popisuje příslušnou žárovku v pořadí: první A, druhá B, třetí C. Označení 1 znamená, že tlačítko mění stav dané žárovky, a 0, že na ni nemá vliv. Podle uvedených vlastností tlačítek platí

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pomocí vektorů lze popsat i konkrétní stavy žárovek. Žárovka svítí: 1, nebo nesvítí: 0. Počáteční stav, kdy nesvítí žádná žárovka, by popsal vektor

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Následným stisknutím tlačítek A a B jsme se dostali ke třetímu obrázku. Vektorově zapsáno za využití sčítání v soustavě popisující stav žárovek platí

$$\mathbf{s} + \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1+1 \\ 0+1+1 \\ 0+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

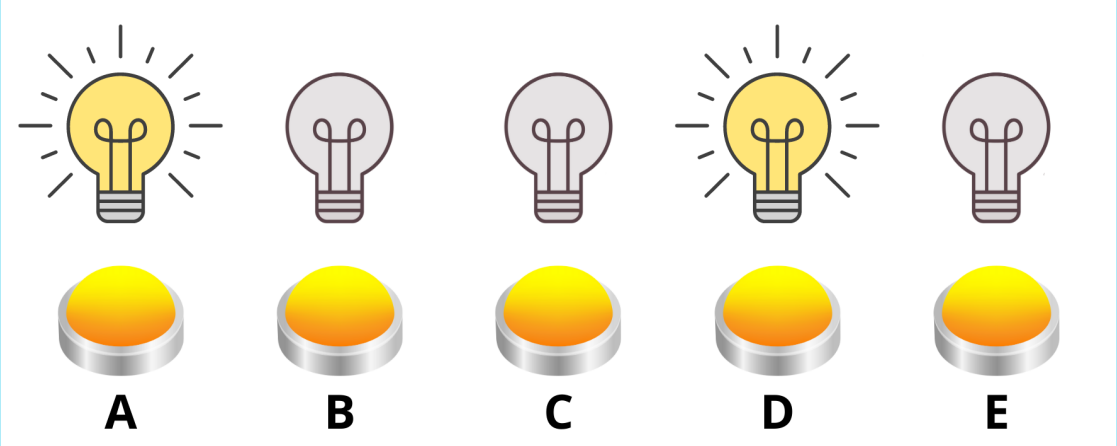
Úloha 1. Určete kombinaci tlačítek, které je potřeba stisknout, aby svítily pouze žárovky A a C, pokud jsou na počátku všechny tři žárovky zhasnuté.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.

Funded by the European Union

© 2016–2025 MATH4U

Úloha 2. Síť žárovek rozšíříme na pět kusů a tlačítka mají stále stejnou vlastnost, že ovládají žárovku nad sebou a její přímé sousedy. Na počátku nejsou všechny žárovky zhasnuty, ale už svítí žárovky A a D.



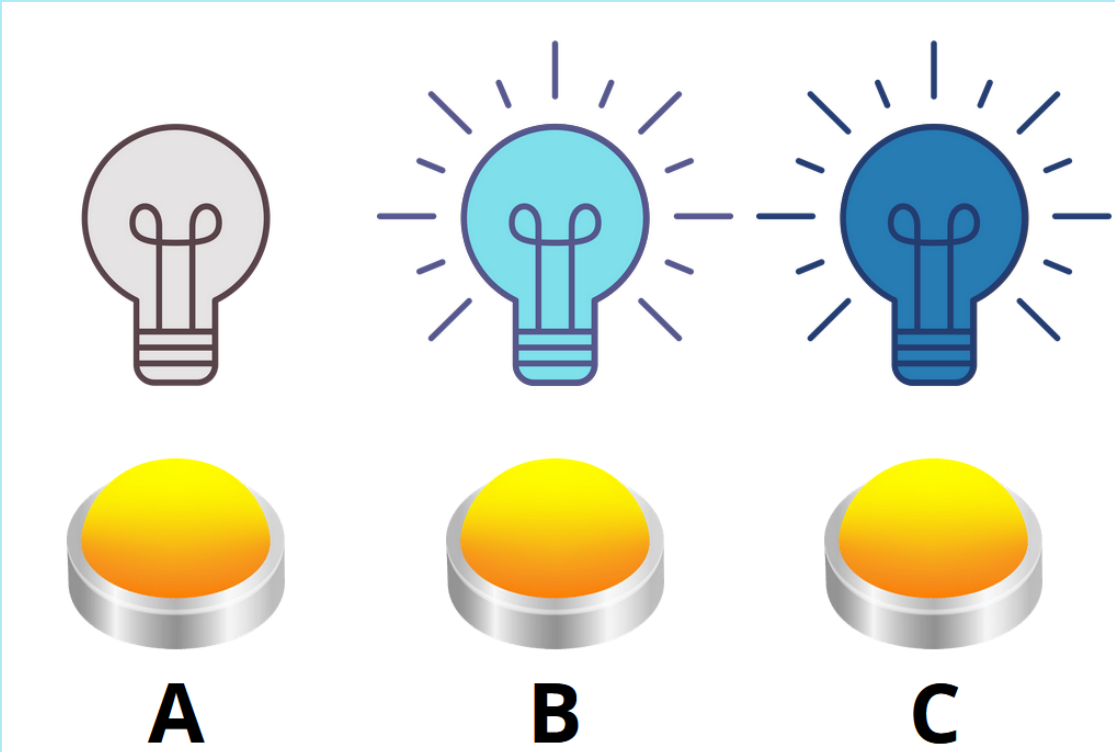
Obrázek 4: Zadání úlohy s pěti žárovkami

Zjistěte, jakou kombinaci tlačítek zmáčknout, aby na konci - byly všechny žárovky zhasnuté, - svítila pouze žárovka E.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union

© 2016–2025 MATH4U

Úloha 3. Nové, modře svítící žárovky se od předchozích liší tím, že mohou svítit ve dvou různých odstínech modré. Pokud je tato žárovka zhasnutá, prvním stisknutím tlačítka, které ji ovládá, se rozsvítí světle modře, druhým stisknutím tmavě modře a po třetím stisknutí opět zhasne. Tlačítka mají stále stejnou vlastnost, tedy ovládají žárovku nad sebou a její přímé sousedy. Kolikrát musíte stisknout které z tlačítek A, B a C, abyste ze stavu na obrázku všechny žárovky zhasli?



Poznámka: Vzdělanější matematik si všimne, že vlastně počítáme se zbytkovými třídami a provadíme aritmetiku nad $(\mathbb{Z}_2, +)$, resp. $(\mathbb{Z}_3, +)$. Řešení úloh ovšem fungují i bez zavádění těchto struktur.

The portal Math4U is developed within the international projects of the Department of Applied Mathematics (VSB-Technical University of Ostrava) and other institutions in Czechia, Poland, Slovakia, and Spain.
Funded by the European Union