

# Odpal golfovej loptičky

Keywords: diferenciálny a integrálny počet, optimalizácia, kvadratická rovnica, derivácia

## Šikmý vrh

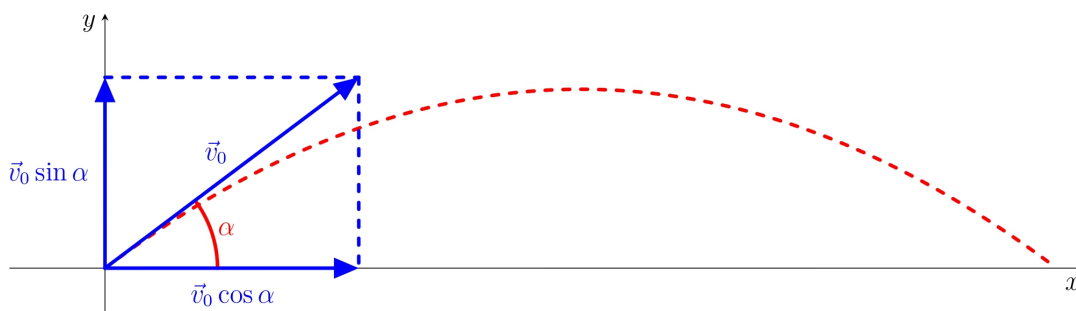
Šikmý vrh je najvšeobecnejší spôsob uvedenia telesa do pohybu v homogénnom tiažovom poli. Predpokladajme, že teleso (hmotný bod) je vrhnuté šikmo do priestoru bez odporu. Počiatočná rýchlosť je  $\vec{v}_0$  a zvierá s vodorovnou rovinou uhol  $\alpha$ . Zavedieme karteziánsky súradnicový systém s vodorovnou osou  $x$  v smere vrhu a osou  $y$  zvislou nahor, ako je znázornené na obrázku. Počiatočnú rýchlosť  $v_0$  rozložíme na zložky vzhľadom na zvolený súradnicový systém:

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha).$$

Pohyb telesa je ovplyvnený tiažovým zrýchlením  $g$ , ktoré smeruje zvislo nadol. Horizontálna zložka tiažového zrýchlenia je nulová, preto pohyb vo vodorovnom smere nie je ovplyvnený tiažovým poľom a horizontálna rýchlosť zostáva konštantná. Zvislá zložka pohybu je ovplyvnená konštantným záporným zrýchlením  $-g$ , teda smerom nadol. Ide o pohyb s konštantným spomalením a počiatočnou zvislou rýchlosťou  $v_0 \sin \alpha$ .

Pre súradnice polohy hmotného bodu bude platiť

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos \alpha, \\ y(t) &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \quad (1)$$



Obr. 1: Šikmý vrh

## Odpal golfovej loptičky

Hráč golfu odpáli loptičku s počiatočnou rýchlosťou  $v_0$ , ktorá zvierá s vodorovnou rovinou uhol  $\alpha$ . Predpokladajme, že odporová sila je zanedbateľná. Pohyb loptičky preto spĺňa podmienky pre pohyb šikmo vrhnutého telesa v prostredí bez odporu vzduchu.

**Úloha 1.** Dokážte, že trajektória golfovej loptičky (pri zanedbaní odporu vzduchu) je parabola.

*Riešenie.* Na nájdenie trajektórie využijeme, že je daná tvarom funkcie  $y = f(x)$ . Je potrebné odstrániť parameter  $t$  z rovníc určujúcich polohu (1). Z prvej rovnice vyjadríme čas  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  a dosadíme ho do druhej rovnice:

$$y(x) = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

Ak si označíme

$$A = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$B = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

vidíme, že sme získali vzťah v tvare

$$y(x) = Ax^2 + Bx,$$

čo je rovnica kvadratickej funkcie, kde  $A \neq 0$ . Keďže trajektória golfovej loptičky je daná tvarom funkcie  $y = f(x)$  môžeme povedať, že dráha loptičky je parabola.

**Úloha 2.** Vypočítajte výšku vrhu, t. j. maximálnu výšku  $y_{max}$ , ktorú dosiahne vystrelená loptička.

*Riešenie.* Pre výpočet výšky vrhu potrebujeme vypočítať maximum funkcie z predchádzajúcej úlohy:

$$f: y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

Vypočítame deriváciu funkcie  $f$

$$y' = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot 2x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Na nájdenie stacionárneho bodu položíme deriváciu rovnú nule a dostaneme rovnicu

$$\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Riešením tejto rovnice je

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Keďže trajektória pohybu je daná tvarom konkávnej kvadratickej funkcie, nájdený stacionárny bod je maximum a zvislá súradnica tohto bodu je výška vrhu.

Výšku vrhu vypočítame dosadením súradnice  $x_{max}$  funkcie  $f$ :

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

**Úloha 3.** Vypočítajte pre aký uhol  $\alpha$  doletí golfová loptička pri konštantnej počiatočnej rýchlosti do maximálnej vzdialenosti

*Riešenie.* Pre výpočet uhla maximálneho dostrelu potrebujeme získať súradnice  $x_d$  miesta dopadu ako funkciu uhla  $\alpha$  a nájsť maximum funkcie  $x_d(\alpha)$ . Keďže  $y = 0$ , keď loptička dopadne na zem tak dosadíme do funkcie

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x$$

za  $y$  nulovú výšku a vyriešime získanú rovnicu

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x,$$

$$0 = x \cdot \left( -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

Táto rovnica v súčinovom tvare má dve riešenia. Prvé riešenie  $x = 0$  zodpovedá miestu odpalu loptičky a druhé riešenie  $x_d$  miestu dopadu

$$x_d(\alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Teraz potrebujeme nájsť maximum funkcie  $x_d(\alpha)$ . Stačí nájsť stacionárny bod vzhľadom na trajektóriu. Vypočítame deriváciu funkcie  $x_d(\alpha)$  podľa  $\alpha$

$$x'_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos 2\alpha \cdot 2.$$

Ak položíme deriváciu rovnú nule, tak dostaneme pre stacionárny bod  $\cos 2\alpha = 0$ , čo je splnené pre  $2\alpha = 90^\circ$  (pre odpal loptičky platí  $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ , takže riešenie je jednoznačné). Stacionárny bod je teda  $\alpha = 45^\circ$ .

Maximálny dostrel v golfe dosiahneme pri odpálení loptičky pod uhlom  $\alpha = 45^\circ$  a loptička dopadne do vzdialenosti

$$x_d(45^\circ) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \cdot 45^\circ) = \frac{v_0^2}{g}.$$

Pripomeňme, že je možné získať funkciu  $x_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$  bez diferenciálneho počtu len využitím symetrie paraboly. Vrchol paraboly sa nachádza v strede medzi nulovými bodmi. Preto možno  $x$ -súradnicu bodu dopadu zapísať ako  $x_d(\alpha) = 2 \cdot x_{max}$ . To nám umožňuje vyhnúť sa riešeniu kvadratickej rovnice v súčinovom tvare získanej dosadením  $y = 0$  do funkcie  $y(x)$ .

## Literatúra

1. Kubera, Miroslav; Nečas, Tomáš; Beneš, Vojtěch. *Online učebnice fyziky pro gymnázia - Vrh* [online]. Available from <https://e-manuel.cz/kapitoly/pouziti-pohybovych-zakonu/vyklad/vrh/> [cit. 27.9.2023].
2. Moc, Ondřej; Eisenmann, Petr. *Šikmý vrh z rozhledny* [online]. Available from [https://mfi.upol.cz/files/26/2602/mfi\\_2602\\_129\\_137.pdf](https://mfi.upol.cz/files/26/2602/mfi_2602_129_137.pdf) [cit. 27.9.2023]