

Strzał piłką golfową

Keywords: rachunek różniczkowy i całkowy, optymalizacja, równanie kwadratowe, wyprowadzenie

Skośny ruch pocisku

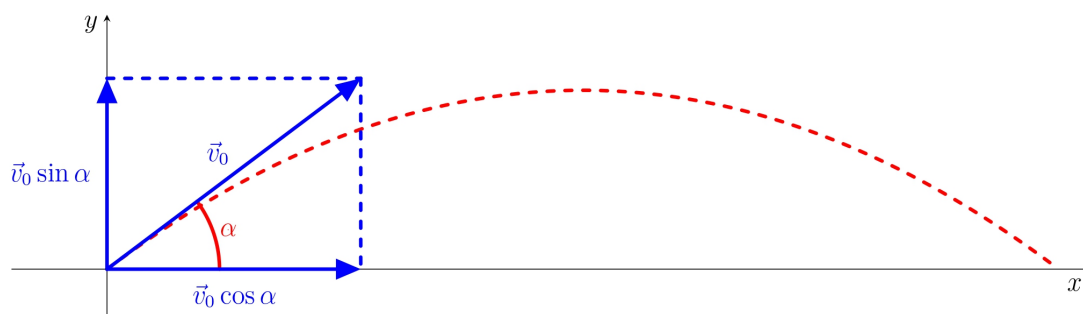
Ruch pocisku jest najbardziej ogólnym sposobem wprawiania w ruch obiektu znajdującego się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Załóżmy, że ciało (masa punktowa) jest wyrzucane ukośnie w przestrzeń bez oporu. Prędkość początkowa wynosi $\vec{v}_0$, a kąt pomiędzy wektorem $\vec{v}_0$ i kierunkiem poziomym wynosi α . Wprowadźmy kartezjański układ współrzędnych z poziomą osią x i pionową osią y , jak pokazano na rysunku. Współrzędne wektora prędkości początkowej są następujące

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha).$$

Ruch ciała jest regulowany przez przyspieszenie grawitacyjne g skierowane pionowo w dół. Pozioma składowa przyspieszenia grawitacyjnego wynosi zero, dlatego ruch w kierunku poziomym pozostaje bez wpływu pola grawitacyjnego. Pionowa składowa ruchu jest pod wpływem ujemnego przyspieszenia $-g$. Stąd jest to ruch ze stałym (równomiernym) opóźnieniem i prędkością początkową $v_0 \sin \alpha$.

Możemy użyć wzorów na odległość ruchu ze stałą prędkością i stałym przyspieszeniu do ilościowego określenia współrzędnych punktu masy. W ten sposób otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos \alpha, \\ y(t) &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \quad (1)$$



Rysunek 1: Nachylona ściółka

Ruch piłki golfowej

Golfista uderza piłkę z prędkością początkową v_0 . Kąt między prędkością początkową a płaszczyzną poziomą wynosi α . Załóżmy, że siła oporu jest pomijalna. Ruch kuli spełnia warunki ruchu pocisku wyrzuczonego pod kątem w środowisku bez oporu powietrza.

Ćwiczenie 1. Udowodnij, że trajektoria piłki golfowej podąża ścieżką paraboliczną.

Rozwiązanie: Znajdź równanie trajektorii w postaci $y = f(x)$. Konieczne jest wyeliminowanie parametru t z układu (1).

Rozwiązujemy pierwsze równanie względem czasu $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ i podstawiamy do drugiego równania:

$$y(x) = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

Stąd widzimy, że współrzędna y trajektorii jest funkcją kwadratową współrzędnej x , a trajektoria piłki golfowej jest zatem opisana przez parabolę.

Ćwiczenie 2. Oblicz wysokość rzutu, tj. maksymalną wysokość piłki golfowej. wysokość y_{max} jaką osiągnie wystrzelona kula.

Rozwiązanie: Wysokość rzutu (ruch pocisku) to maksimum funkcji z poprzedniego ćwiczenia:

$$f: y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

Pochodną funkcji f obliczamy jako

$$y' = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Aby znaleźć punkt stacjonarny, ustawiamy pochodną równą zero i otrzymujemy równanie

$$\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Ponieważ trajektoria ruchu jest wklęsłą funkcją kwadratową, zlokalizowany punkt stacjonarny jest maksimum, a współrzędna pionowa tego punktu jest wysokością rzutu.

Wysokość rzutu oblicza się poprzez obliczenie funkcji f w uzyskanej współrzędnej x_{max} :

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Ćwiczenie 3. Biorąc pod uwagę stałą prędkość początkową, znajdź kąt α który gwarantuje maksymalną odległość między punktem początkowym a punktem końcowym trajektorii.

Rozwiązanie Aby znaleźć maksymalny kąt zasięgu, musimy uzyskać punkt końcowy x_d trajektorii jako funkcję kąta

α i znaleźć maksimum funkcji $x_d(\alpha)$ Biorąc pod uwagę że $y = 0$, gdy piłka uderza w ziemię, znajdujemy zero funkcji

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

Stąd otrzymujemy:

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x,$$

$$0 = x \cdot \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

To równanie ma dwa rozwiązania. Pierwsze rozwiązanie $x = 0$ odpowiada miejscu wystrzelenia piłki, a drugie rozwiązanie x_d do miejsca uderzenia

$$x_d(\alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Teraz musimy znaleźć maksimum funkcji $x_d(\alpha)$. Wystarczy znaleźć punkt stacjonarny, ponieważ wykazano, że trajektoria jest parabolą, która otwiera się w dół. Obliczamy pochodną funkcji $x_d(\alpha)$ względem α

$$x'_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos 2\alpha \cdot 2.$$

Ustawiając pochodną równą zero, otrzymujemy $\cos 2\alpha = 0$, który jest spełniony dla $2\alpha = 90^\circ$ (piłka zostanie wystrzelona, oczywiście $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, więc rozwiązanie jest jednoznaczne). Tak więc punkt stacjonarny to $\alpha = 45^\circ$.

Maksymalny zasięg w golfie osiąga się uderzając piłkę pod kątem $\alpha = 45^\circ$ a piłka ląduje w odległości

$$x_d(45^\circ) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \cdot 45^\circ) = \frac{v_0^2}{g}.$$

Należy zauważyć, że możliwe jest uzyskanie funkcji $x_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ bez rachunku różniczkowego, wykorzystując symetrię paraboli. Wierzchołek paraboli znajduje się w środku punktów zerowych. Dlatego współrzędna x punktu uderzenia można określić ilościowo jako $x_d(\alpha) = 2 \cdot x_{max}$.

Pozwala nam to uniknąć rozwiązywania równania kwadratowego otrzymanego przez podstawienie $y = 0$ do funkcji $y(x)$ i faktoryzując prawą stronę.

Literatura

1. Kubera, Miroslav; Nečas, Tomáš; Beneš, Vojtěch. *Podręcznik online fizyka dla szkół średnich - Linie* [online]. Dostępne pod adresem <https://e-manuel.cz/kapitoly/pouziti-pohybovych-zakonu/vyklad/vrhy/>. [cytowany 2023 września 27].
2. Moc, Ondřej; Eisenmann, Petr. *Pochyły szczyt z wieży*. [online]. Dostępne pod adresem https://mfi.upol.cz/files/26/2602/mfi_2602_129_137.pdf [cytowany 27.9.2023]