

Odpal golfového míčku

Keywords: diferenciální a integrální počet, optimalizace, kvadratická rovnice, derivace

Šikmý vrh

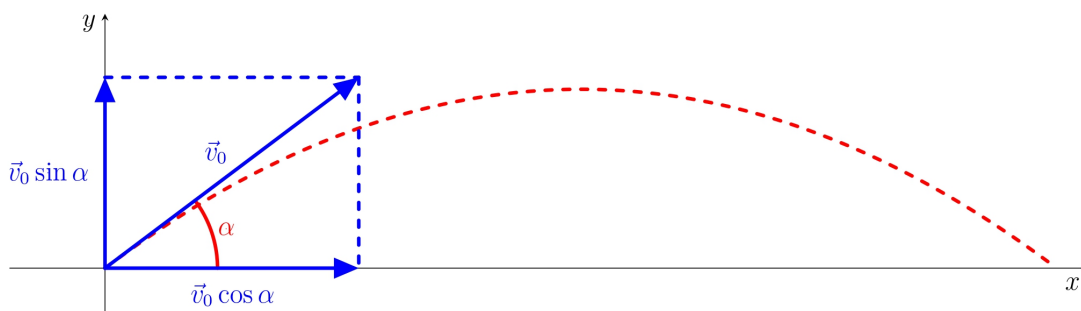
Šikmý vrh je nejobecnější způsob uvedení tělesa v homogenním tíhovém poli do pohybu. Předpokládejme, že hmotný bod byl šikmo vržen v prostředí bez odporu a vektor jeho počáteční rychlosti $\vec{v}_0$ svírá s vodorovnou rovinou úhel α . Při zavedení kartézského souřadného systému s osou x vodorovnou ve směru vrhu a osou y svislou vzhůru bude počáteční rychlost dána vektorem

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha).$$

Pohyb tělesa je ovlivněn tíhovým zrychlením o velikosti g mířícím svisle dolů. Vodorovná komponenta tíhového zrychlení je nulová a proto ve vodorovném směru pohyb není tíhovým polem ovlivněn. Ve směru svislém je pohyb tělesa ovlivněn zrychlením $-g$ a jedná se o rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí $v_0 \sin \alpha$.

Pro souřadnice polohy hmotného bodu bude platit

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos \alpha, \\ y(t) &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \quad (1)$$



Obrázek 1: Šikmý vrh

Odpal golfového míčku

Hráč golfu odpaluje míček počáteční rychlostí v_0 svírající s vodorovnou rovinou úhel α . Předpokládejme, že na míček působí zanedbatelné odporové síly. Pohyb míčku tedy splňuje podmínky pro pohyb šikmo vrženého tělesa v prostředí bez odporu vzduchu.

Úloha 1. Dokažte, že trajektorii golfového míčku je parabola.

Řešení. Pro nalezení rovnice trajektorie, tedy funkce $y = f(x)$, je nutné z rovnic (1) určujících polohu bodu odstranit parametr t .

Proto vyjádříme z první rovnice čas $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ a dosadíme ho do rovnice druhé:

$$y(x) = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

Odtud vidíme, že y -ová souřadnice trajektorie je kvadratickou funkcí x -ové souřadnice a trajektorií golfového míčku je proto parabola.

Úloha 2. Vypočítejte výšku vrhu, tj. maximální výšku y_{max} , do které se dostane vystřelený míček.

Řešení. Pro výpočet výšky vrhu potřebujeme vypočítat extrém funkce z předchozího bodu:

$$f: y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x.$$

Vypočítáme derivaci funkce f

$$y' = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot 2x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Pro nalezení stacionárního bodu položíme derivaci rovnu nule a dostaneme rovnici

$$\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Jejím řešením je

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

Vzhledem k tomu, že trajektorií pohybu je konkávní kvadratická funkce, musí být nalezený stacionární bod jejím maximem, tj. jeho svislá souřadnice odpovídá výšce vrhu.

Výšku vrhu vypočítáme dosazením získané souřadnice x_{max} do funkce f :

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Úloha 3. Vypočítejte, při jakém úhlu α doletí míček při konstantní velikosti počáteční rychlosti do maximální vzdálenosti.

Řešení. Pro výpočet úhlu maximálního dostřelu potřebujeme získat souřadnice x_d místa dopadu jako funkci úhlu α a tuto funkci maximalizovat, tj. najdeme maximum funkce $x_d(\alpha)$. Vzhledem k tomu, že při dopadu míčku bude $y = 0$, dosadíme do funkce

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x$$

za y nulovou výšku a vyřešíme získanou rovnici:

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x,$$

$$0 = x \cdot \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

Tato rovnice v součinném tvaru má dvě řešení. První řešení $x = 0$ odpovídá místu odpalu míčku a druhé řešení x_d místu dopadu

$$x_d(\alpha) = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

Nyní je nutné nalézt maximum funkce $x_d(\alpha)$. Vzhledem k tvaru trajektorie stačí najít její stacionární bod. Vypočítáme derivaci funkce $x_d(\alpha)$ podle α

$$x'_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos 2\alpha \cdot 2 .$$

Položíme-li derivaci rovnu nule, dostaneme pro stacionární bod $\cos 2\alpha = 0$, což je splněno pro $2\alpha = 90^\circ$ (pro odpal míčku zřejmě platí $\alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, proto je řešení jednoznačné). Odsud $\alpha = 45^\circ$.

Maximálního dostřelu při golfu docílíme při odpalu pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ a míček dopadne do vzdálenosti

$$x_d(45^\circ) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \cdot 45^\circ) = \frac{v_0^2}{g} .$$

Funkci $x_d(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ jsme mohli získat i snadněji využitím symetrie paraboly. Vrchol paraboly totiž leží uprostřed trajektorie míčku. Proto pro místo dopadu x_d platí $x_d(\alpha) = 2 \cdot x_{max}$. Tím se vyhneme řešení kvadratické rovnice v součinném tvaru získané dosazením $y = 0$ do funkce $y(x)$.

Literatura

1. Kubera, Miroslav; Nečas, Tomáš; Beneš, Vojtěch. *Online učebnice fyziky pro gymnázia - Vrh* [online]. Dostupné z <https://e-manuel.cz/kapitoly/pouziti-pohybovych-zakonu/vyklad/vrhy/> [cit. 27.9.2023].
2. Moc, Ondřej; Eisenmann, Petr. *Šikmý vrh z rozhledny* [online]. Dostupné z https://mfi.upol.cz/files/26/2602/mfi_2602_129_137.pdf [cit. 27.9.2023]