

Optimální cena vstupenky

Keywords: funkce, optimalizace, kvadratická rovnice, dolní celá část čísla

Majitel kolotoče chce určit vstupné na svou atrakci tak, aby jeho zisk byl maximální. Pro jednoduchost stanovuje vstupné v násobcích 10 Kč. Ví, že při stávající ceně 50 Kč může očekávat návštěvnost asi 600 lidí za den. Z minulých let také odhaduje, že při nárůstu ceny vstupenky o 10 korun přijde za den asi o 50 návštěvníků méně, zatímco při poklesu ceny vstupenky o 10 korun přijde naopak o 50 návštěvníků více. Pro zvýšení atraktivity dostane každý třetí návštěvník při odchodu cukrovou vatu v hodnotě 30 Kč na účet kolotočáře.

Protože kolotočářův syn shodou okolností studuje matematiku, rozhodl se, že otci s problémem pomůže.

Úloha 1. Po chvíli uvažování napsal syn vzorec

$$y = (50 + 10x) \cdot (600 - 50x) - \frac{600 - 50x}{3} \cdot 30.$$

Rozklíčujte jednotlivé části tohoto vzorce.

Řešení. Roli jednotlivých částí rovnice objasní následující tabulka:

Část rovnice	Význam
$10x$	změna ceny vstupenky
$50 + 10x$	nová cena vstupenky
$600 - 50x$	odhadovaný počet návštěvníků po změně ceny
$(50 + 10x)(600 - 50x)$	denní příjem ze vstupenek
$\frac{600 - 50x}{3}$	denní počet obdarovaných návštěvníků
$\frac{600 - 50x}{3} \cdot 30$	denní náklady na cukrovou vatu
y	celkový denní zisk

Úloha 2. Chápeme-li předchozí vzorec jako funkci proměnné x , o jakou funkci se jedná a jak vypadá její graf?

Řešení. Úpravou pravé strany vzorce jej převedeme na tvar

$$y = -500x^2 + 4\,000x + 24\,000.$$

Dostáváme tak kvadratickou funkci, jejímž grafem je parabola. Tato parabola je kvůli zápornému koeficientu u kvadratického členu konkávní.

Úloha 3. Při jaké ceně vstupenky by majitel dosáhl maximálního zisku?

Řešení. Naším úkolem je určit maximum funkce

$$f: y = -500x^2 + 4\,000x + 24\,000.$$

Víme, že graf funkce f protíná osu x v bodech odpovídajících kořenům kvadratického polynomu. Ve středu úsečky, která spojuje tyto body, pak najdeme hledané maximum funkce (jak plyne ze symetrie

paraboly). Určíme proto kořeny kvadratického polynomu.

$$-500x^2 + 4000x + 24000 = 0$$

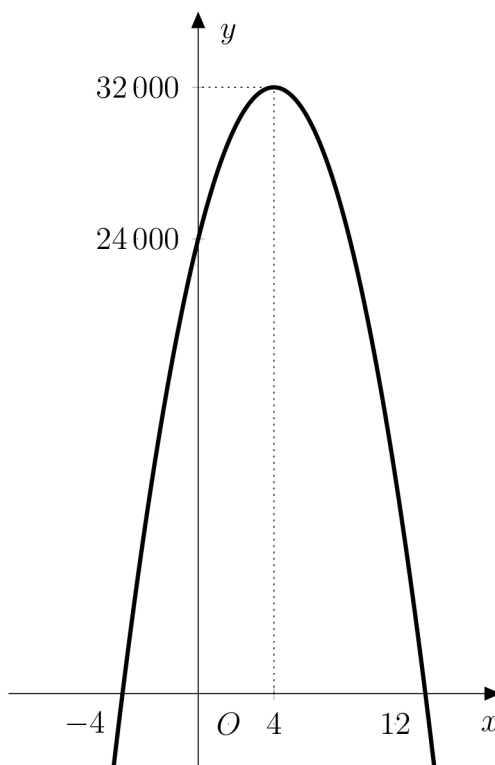
$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$(x - 12)(x + 4) = 0$$

Řešením rovnice jsou kořeny $x_1 = 12$ a $x_2 = -4$, tedy maximum funkce f je v bodě $x_{max} = \frac{12-4}{2} = 4$. Pro maximální zisk je tedy potřeba navýšit cenu vstupenky o $4 \cdot 10$ Kč na novou cenu 90 Kč.

Úloha 4. O kolik korun je maximální zisk vyšší, než by byl zisk při původní ceně?

Řešení. Odpověď na tuto úlohu je rozdílem $f(4) - f(0)$. Postupným dosazením obou hodnot do předpisu funkce f dostáváme $f(4) = 32000$ a $f(0) = 24000$. Rozdíl obou částek je pak roven 8000 Kč. Graf funkce f s vyznačenými hodnotami $f(4)$ a $f(0)$ je na obrázku:



Obrázek 1: Graf funkce zisku

Úloha 5. Při sestavování vzorce si syn jednu věc zjednodušil. Poznáte kterou? Dokázali byste úlohu vyřešit bez tohoto zjednodušení? Porovnejte pak svůj model s modelem kolotočářova syna.

Řešení. Vzorec kolotočářova syna je přesný pouze v případě, že je počet návštěvníků za den $600 - 50x$ dělitelný třemi. Pokud dělitelný třemi není, pak je počet obdarovaných návštěvníků roven tzv. *dolní celé části* čísla $\frac{600-50x}{3}$; značíme $\lfloor \frac{600-50x}{3} \rfloor$.

Dolní celá část čísla je funkce, která každému reálnému číslu x přiřazuje největší celé číslo m takové, že $m \leq x$, např. $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ nebo $\lfloor -8,3 \rfloor = -9$.

Results matter!

Porovnejme nyní dříve použitou funkci f s novou funkcí g , která počítá s dolní celou částí:

$$g: y = (50 + 10x) \cdot (600 - 50x) - \left\lfloor \frac{600 - 50x}{3} \right\rfloor \cdot 30.$$

Porovnání provedeme pro okolí již stanoveného maxima $x_{max} = 4$. Za x tak budeme dosazovat smysluplné hodnoty z intervalu $\langle 3,5; 4,5 \rangle$, přičemž za smysluplné považujeme takové hodnoty, aby byla cena vstupenky i počet návštěvníků celočíselné. Jde vidět, že se stačí omezit na celočíselnost ceny vstupenky, a ta bude celočíselná pro právě takové hodnoty, které mají v dekadickém zápisu nejvýše jedno desetinné místo.

Postupným dosazováním můžeme výsledky přehledně shrnout v tabulce (s výhodou můžeme použít software typu MS Excel):

x	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
$f(x)$	31 875	31 920	31 955	31 980	31 995	32 000	31 995	31 980	31 955	31 920	31 875
$g(x)$	31 895	31 920	31 965	32 000	31 995	32 010	32 015	31 980	31 965	31 940	31 875

Denní zisk určený pomocí funkce g je vždy větší nebo roven dennímu zisku určenému funkcí f . Rovněž maximum funkce g se nachází v jiném bodě, kterým je 4,1, čemuž odpovídá cena vstupenky 91 Kč a odhadovaná denní návštěvnost 395 lidí.

Můžeme si všimnout následujících věcí:

- Rozdíly mezi zisky jsou velmi malé, ve zlomcích ceny jedné vstupenky. Nezáleží tak na tom, jestli vstupenka bude stát 90 nebo 91 Kč, protože jediný člověk, který oproti odhadům přijde navíc (resp. nepřijde), spolehlivě smaže veškeré rozdíly mezi zisky obou modelů.
- Zatímco maximum funkce f stanovíme přímým a poměrně jednoduchým výpočtem, maximum funkce g jsme museli stanovit dosazováním všech přípustných hodnot (a-to ještě z poměrně úzkého intervalu).

Proto je možné říct, že i přes zjednodušení je dostačující (a vlastně i výhodnější) použít k výpočtu maximálního zisku funkci f .