

Preplávanie rieky

Keywords: goniometria, sínusová veta, kosínusová veta

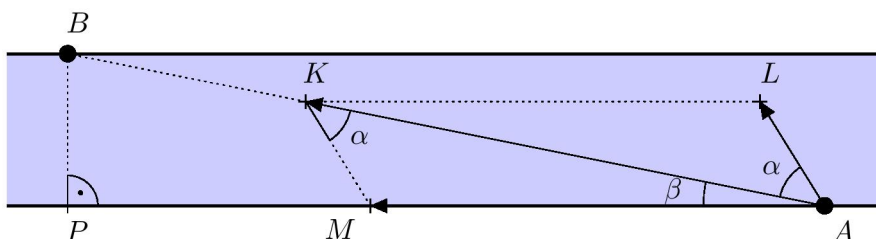
Prievozník sa musí dostať zo svojho doku na jednom brehu rieky do druhého, ktorý sa nachádza na opačnej strane rieky 500 m po prúde. Rieka je medzi brehmi priama a široká 100 m. Rýchlosť prúdu je 2 m/s. Taktiež vieme, že prievozníková loď pláva vzhľadom na vodu rýchlosťou 12 km/h.

Úloha 1. Prievozník sa chce dostať priamo z jedného doku na brehu rieky na druhý. Podarí sa mu to, ak loď nasmeruje pod určitým uhlom a bude tento smer udržiavať. O aký uhol by mal prievozník stočiť svoju loď, aby išiel priamo do druhého doku na opačnom brehu rieky?

Riešenie. Označme bodmi A a B východiskový a cieľový bod. Následne bod P ako päťu kolmice z bodu B na opačný breh rieky. Označme tiež vektory rýchlosti prúdu, rýchlosti lode vzhľadom na vodu a výslednej rýchlosti lode (rýchlosti lode voči zemskému povrchu) pričom všetky majú začiatkové body v bode A a koncové body určené nasledovne (pozri obrázok):

- $\vec{AM}$ je vektor rýchlosti prúdu rieky.
- $\vec{AL}$ je vektor rýchlosti lode vzhľadom na vodu (bez započítania prúdu).
- $\vec{AK}$ je vektor výslednej rýchlosti lode voči zemskému povrchu (prúd + rýchlosť lode)

Pričom platí, že $K \in AB$ a podľa pravidla pre sčítanie vektorov je štvoruholník $MALK$ rovnobežník. Našou úlohou je určiť uhol KAL , ktorý označíme α .



Obr. 1: Preplávanie rieky.

Označme ďalej $\angle MAK = \beta$, potom $\angle MAL = \alpha + \beta$. Zo zadania vieme $|BP| = 100$ m a $|AP| = 500$ m. Využitím funkcie tangens v pravouhlom trojuholníku PAB dostaneme $\beta = \arctan \frac{1}{5} \doteq 11^\circ 19'$.

Každý rovnobežník je rozdelený svojou uhlopriečkou na dva zhodné trojuholníky, preto platí $\angle AKM = \angle KAL = \alpha$. K výpočtu α využijeme sínusovú vetu v trojuholníku AKM . Po prevode dĺžok strán na rovnaké jednotky (v našom prípade kilometre za hodinu), dostaneme konkrétne $|KM| = 12$ km/h a $|AM| = 2 \cdot 3,6 = 7,2$ km/h. Vyjadríme teraz α zo sínusovej vety:

$$\frac{|KM|}{\sin \beta} = \frac{|AM|}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{|AM|}{|KM|} \cdot \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin \left(\frac{|AM|}{|KM|} \cdot \sin \beta \right)$$

Results matter!

Po dosazení konkrétných hodnot dostáváme $\alpha \doteq 6^\circ 45'$. Preto musí prevozník otočiť svoju loď približne o 7° doprava od priameho smeru k cieľu.

Úloha 2. Ak digitálne hodiny na lodi ukazujú 11:00 v momente odchodu (nezobrazujú sekundy), aký čas budú hodiny ukazovať, keď loď dorazí do druhého doku?

Riešenie. Najprv určíme vzdialenosť medzi dvoma dokmi pomocou Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku ABP :

$$|AB| = \sqrt{|AP|^2 + |BP|^2}$$

$$|AB| = \sqrt{0,5^2 + 0,1^2} \text{ km}$$

$$|AB| \doteq 0,51 \text{ km.}$$

Teraz musíme určiť rýchlosť lode vzhľadom k zemskému povrchu, ktorá sa rovná dĺžke úsečky AK . Môžeme ju určiť napríklad pomocou kosínusovej vety v trojuholníku AKM . Vnútorný uhol $|\sphericalangle AMK| = \gamma$ má veľkosť $180^\circ - \alpha - \beta \doteq 161^\circ 56'$. Teraz pre $|AK|$ môžeme zapísať:

$$|AK| = \sqrt{|KM|^2 + |AM|^2 - 2 \cdot |KM| \cdot |AM| \cdot \cos \gamma}$$

$$|AK| = \sqrt{12^2 + 2^2 - 2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot \cos(161^\circ 56')} \text{ km/h}$$

$$|AK| \doteq 19,0 \text{ km/h}$$

Loď tak prejde dráhu 0,51 km priemernou rýchlosťou 19 km/h. Výpočtom:

$$t = \frac{\text{dráha}}{\text{rýchlosť'}}$$

$$t = \frac{0,51}{19} \text{ h}$$

zistíme, že to bude približne 97 sekúnd. Preto budú po príchode do cieľa hodiny ukazovať 11:01 alebo 11:02.