

Przekraczanie rzeki

Keywords: trygonometria, prawo sinusów, prawo cosinusów

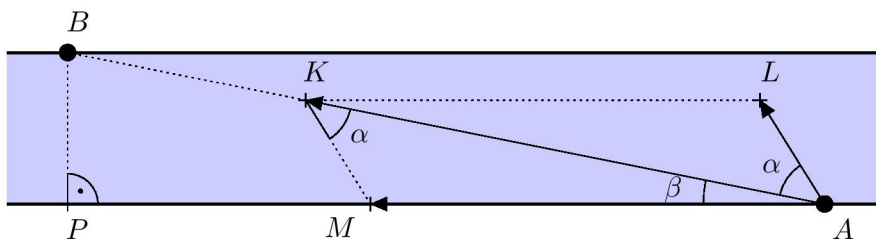
Prom musi dostać się ze swojej przystani na jednym brzegu rzeki do drugiej, która znajduje się na przeciwległym brzegu, 500 m w dół rzeki. Rzeka między dokami jest prosta i 100 m szeroka. Prędkość prądu wynosi 2 m/s. Wiemy również, że łódź przewoźnika porusza się z prędkością 12 km/h względem wody.

Zadanie 1. Prom chce przepłynąć bezpośrednio z jednego doku do drugiego. Może to osiągnąć, ustawiając łódź pod kątem w poprzek rzeki i utrzymując ten kierunek. O jaki kąt powinien zawrócić prom, aby popłynąć prosto do drugiego doku?

Rozwiązanie. Oznaczmy przez A i B punkt początkowy i docelowy. Oznaczmy również przez P podnóże linii prostopadłej z punktu B do przeciwległego brzegu rzeki. Następnie zaznaczamy wektory prędkości prądu, prędkości łodzi względem wody, oraz wynikową prędkość łodzi (prędkość łodzi względem dna rzeki), wszystkie z ich punktami początkowymi w punkcie A i punktami końcowymi w następujący sposób (patrz rysunek):

- $\vec{AM}$ to wektor prędkości prądu.
- $\vec{AL}$ to wektor prędkości łodzi względem wody (bez uwzględnienia prądu).
- $\vec{AK}$ to wektor wynikowej prędkości łodzi względem dna rzeki (prąd + prędkość łodzi).

Ponieważ $K \in AB$, naszym zadaniem jest określenie kąta KAL , który oznaczmy przez α . Zgodnie z regułą dodawania wektorów czworokąt $MALK$ jest równoległobokiem.



Rysunek 1: Przekraczanie rzeki.

Dalej, oznaczmy $\angle MAK = \beta$. Następnie $\angle MAL = \alpha + \beta$. Z tego wynika, że $|BP| = 100$ m i $|AP| = 500$ m. Korzystając z funkcji stycznej w trójkącie prostokątnym PAB otrzymujemy $\beta = \arctan \frac{1}{5} \doteq 11^\circ 19'$.

Ponieważ równoległobok jest dzielony przez swoją przekątną na dwa przystające trójkąty, to $\angle AKM = \angle KAL = \alpha$. Aby obliczyć α , wykorzystujemy prawo sinusów dla trójkąta AKM . Po przekonwertowaniu długości boków na wspólną jednostkę (km/h w naszym rozwiązaniu), otrzymujemy konkretnie $|KM| = 12$ km/h i $|AM| = 2 \cdot 3,6 = 7,2$ km/h. Teraz wyrażamy α z prawa sinusów:

$$\frac{|KM|}{\sin \beta} = \frac{|AM|}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{|AM|}{|KM|} \cdot \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin \left(\frac{|AM|}{|KM|} \cdot \sin \beta \right)$$

Po podstawieniu wartości otrzymujemy $\alpha \doteq 6^\circ 45'$. W związku z tym przewoźnik musi obrócić swoją łódź o około 7° w prawo od bezpośredniego kursu do miejsca docelowego.

Zadanie 2. Jeśli zegar cyfrowy na łodzi pokazuje 11:00 w momencie wypłynięcia (bez pokazywania sekund), jaką godzinę pokaże zegar w momencie przybycia łodzi do drugiego doku?

Rozwiązanie. Najpierw określmy odległość między dwoma dokami, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ABP :

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{|AP|^2 + |BP|^2} \\ |AB| &= \sqrt{0,5^2 + 0,1^2} \text{ km} \\ |AB| &\doteq 0,51 \text{ km.} \end{aligned}$$

Teraz określamy wielkość wypadkowej prędkości łodzi względem dna rzeki, która jest równa długości odcinka linii AK . Można to wyznaczyć na przykład korzystając z prawa cosinusów w trójkącie AKM . Oznaczamy kąt wewnętrzny $|\angle AMK| = \gamma$, który mierzy $180^\circ - \alpha - \beta \doteq 161^\circ 56'$. Następnie dla $|AK|$ możemy napisać:

$$\begin{aligned} |AK| &= \sqrt{|KM|^2 + |AM|^2 - 2 \cdot |KM| \cdot |AM| \cdot \cos \gamma} \\ |AK| &= \sqrt{12^2 + 2^2 - 2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot \cos(161^\circ 56')} \text{ km/h} \\ |AK| &\doteq 19,0 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Łódź pokonuje bezpośrednią trasę o długości 0,51 km ze średnią prędkością 19 km/h, co zajmuje:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\text{pokonany dystans}}{\text{średnia prędkość}} \\ t &= \frac{0,51}{19} \text{ h} \end{aligned}$$

czyli około 97 sekund. Dlatego zegar pokaże 11:01 lub 11:02 po przybyciu do doku docelowego.