

Přepnutí řeky

Keywords: goniometrie, sinová věta, kosinová věta

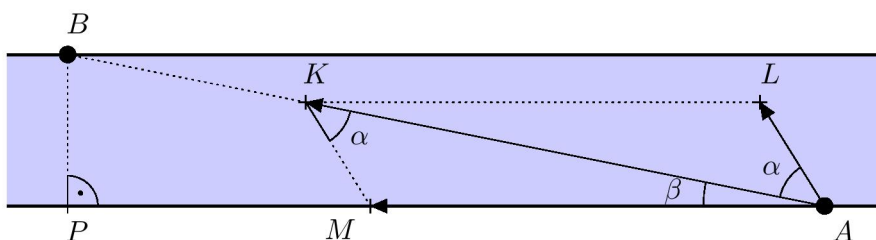
Převozník se musí dostat ze svého přístaviště na břehu řeky do druhého přístaviště, které se nachází na opačném břehu 500 m po proudu. Na tomto úseku řeky nemá žádné zákruty, teče rychlostí 2 m/s a je široká 100 m. Dále víme, že převozníková loď pluje vůči vodě rychlostí 12 km/h.

Úloha 1. O kolik stupňů by měl převozník stočit svou loď vůči přímému směru k cíli?

Řešení. Označme výchozí přístaviště A a cílové přístaviště B a dále označme P patu kolmice spuštěné z bodu B na protější břeh řeky. Dále vyznačme vektory rychlosti řeky, rychlosti lodi vůči vodě a celkové rychlosti lodi na vodě do počátečního bodu A :

- $\vec{AM}$ je vektor rychlosti proudu řeky;
- $\vec{AL}$ je vektor rychlosti lodi vůči vodě (bez započtení proudu);
- $\vec{AK}$ je vektor výsledné rychlosti vůči zemskému povrchu (proud + rychlost vody).

Přičemž platí, že $K \in AB$ a dle pravidla pro sčítání vektorů je čtyřúhelník $MALK$ rovnoběžník. Naším úkolem je určit velikost úhlu KAL , kterou označíme α .



Obrázek 1: Znárodnění úlohy

Označme $\angle MAK = \beta$, tedy platí $\angle MAL = \alpha + \beta$. Ze zadání víme, že $|BP| = 100$ m a $|AP| = 500$ m; užitím funkce tangens v pravouhlém trojúhelníku PAB tak dostáváme $\beta = \arctg \frac{1}{5} \doteq 11^\circ 19'$.

Protože je rovnoběžník půlen svou úhlopříčkou na dva shodné trojúhelníky, je $\angle AKM = \angle KAL = \alpha$. K výpočtu α využijeme sinovou větu pro trojúhelník AKM , neboť velikosti $|KM|$ a $|AM|$ jeho stran odpovídají skutečným velikostem zadaných rychlostí. Po převodu na společnou jednotku (v našem řešení km/h) dostáváme konkrétně $|KM| = 12$ km/h a $|AM| = 2 \cdot 3,6 = 7,2$ km/h. Vyjádříme nyní ze sinové věty:

$$\frac{|KM|}{\sin \beta} = \frac{|AM|}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{|AM|}{|KM|} \cdot \sin \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin \left(\frac{|AM|}{|KM|} \cdot \sin \beta \right)$$

Po dosazení konkrétních hodnot dostáváme $\alpha \doteq 6^\circ 45'$. Převozník tak musí stočit svou loď o přibližně 7° doprava oproti přímému směru k cíli.

Úloha 2. Jestliže digitální hodiny na lodi ukazují v okamžik vyplutí 11:00 (sekundy neukazují), kolik na nich bude v okamžiku, kdy loď přijede do druhého přístaviště?

Řešení. Určeme nejprve vzdálenost obou přístavišť užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ABP :

$$|AB| = \sqrt{|AP|^2 + |BP|^2}$$

$$|AB| = \sqrt{0,5^2 + 0,1^2} \text{ km}$$

$$|AB| \doteq 0,51 \text{ km.}$$

Nyní musíme určit velikost rychlosti lodi vzhledem k zemskému povrchu, která je rovna velikosti úsečky AK . Tu můžeme určit např. z kosinové věty pro trojúhelník AKM . Vnitřní úhel γ přilehlý vrcholu M má přitom velikost $180^\circ - \alpha - \beta$.

$$|AK| = \sqrt{|KM|^2 + |AM|^2 - 2 \cdot |KM| \cdot |AM| \cdot \cos \gamma}$$

$$|AK| = \sqrt{12^2 + 2^2 - 2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot \cos(161^\circ 56')} \text{ km/h}$$

$$|AK| \doteq 19,0 \text{ km/h.}$$

Loď tak urazí dráhu 0,51 km rychlostí 19 km/h, což jí zabere čas

$$t = \frac{\text{dráha}}{\text{rychlost}}$$

$$t = \frac{0,51}{19} \text{ h}$$

tj. přibližně 97 sekund. V cíli tak budou hodiny ukazovat 11:01 nebo 11:02.