

Parabolická kalkulačka

Keywords: analytická geometria, parametrická rovnica priamky

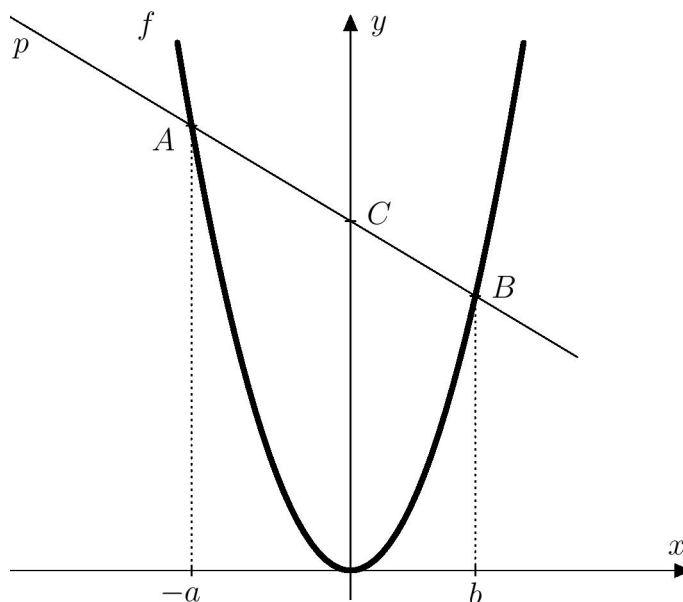
Pri surfovaní na internete našla Eva zaujímavý fakt o grafe funkcie $f: y = x^2$, ktorý môže slúžiť ako kalkulačka na násobenie dvoch čísel a a b .¹ Postup je nasledovný:

1. Na osi x vyznačíme obrazy čísel $-a$ a b .
2. V týchto bodoch zostrojíme priamky kolmé na os x , ktoré sa pretnú s grafom funkcie f a vzniknú priesečníky.
3. Priamka prechádzajúca novovytvorenými priesečníkmi pretína os y v bode, ktorého vzdialenosť od počiatku súradného systému je ab .

Tento postup si môžete vyskúšať v priloženom pracovnom liste, jeho ilustrácia je tiež možná v GeoGebre. Interaktívny applet nájdete na webovej stránke <https://www.geogebra.org/m/sj5cjba1>.

Úloha Platí uvedený postup na všetky dvojice čísel, alebo len pre niektoré? Dá sa tento postup dokázať?

Riešenie. Z postupu je zrejmé, že ak obrazy čísel $-a$ a b splynú, priamku opísanú v treťom kroku nemožno jednoznačne zostrojiť. Preto daný postup nefunguje, ak platí $-a = b$. Ukážeme, že okrem tohto prípadu platí postup pre všetky ostatné dvojice čísel a a b . Podľa postupu zo zadania zostrojme na osi x body zodpovedajúce číslam $-a$ a b , a potom v týchto bodoch zostrojme kolmice na os x . Priesečníky týchto kolmíc s parabolou označme ako A a B a priamku AB potom označme ako p . Priamka p pretína os y v bode C , ktorý určuje neznáme číslo m .



Obr. 1: Ilustračný obrázok

¹Vo všeobecnosti sa grafy, ktoré nám umožňujú vykonávať aritmetické operácie pomocou geometrických konštrukcií, nazývajú *nomogramy*.

Results matter!

Priamka p je definovaná dvoma bodmi $A(-a; a^2)$ a $B(b; b^2)$, a teda smerový vektor je

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [b + a; b^2 - a^2].$$

Vynásobením vektora $\vec{u}$ číslom $\frac{1}{a+b}$ dostaneme

$$\vec{u} = [1; b - a].$$

Túto úpravu môžeme vykonať, pretože v našom prípade $b \neq -a$ a tiež $b + a \neq 0$. Dostávame tak parametrické rovnice

$$p: X = B + t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R}$$

$$p: x = b + t$$

$$y = b^2 + t \cdot (b - a), t \in \mathbb{R}.$$

Dosadením súradníc bodu C do ľavých strán rovníc (t. j. $x = 0, y = m$) dostaneme sústavu rovníc

$$0 = b + t$$

$$m = b^2 + t(b - a).$$

Z prvej rovnice vyjadríme $t = -b$ a dosadíme do druhej rovnice. Odtiaľ

$$m = b^2 + (-b) \cdot (b - a)$$

$$m = ab.$$

Toto je výsledok, ktorý sme potrebovali dokázať.