

Kalkulator paraboliczny

Keywords: geometria analityczna, parametryczne równanie prostej

Podczas surfowania po Internecie Eva znalazła interesujący fakt dotyczący wykresu funkcji $f: y = x^2$, który polega na tym, że wykres może być użyty jako kalkulator do pomnożenia dwóch liczb a i b .¹ Procedura jest następująca:

1. Na osi x zaznacz punkty odpowiadające liczbom $-a$ i b .
2. W tych punktach narysuj linie prostopadłe do osi x i skonstruuj skonstruować ich przecięcia z wykresem funkcji f .
3. Linia przechodząca przez nowo skonstruowane punkty przecięcia przecina oś y w punkcie, którego odległość od początku wynosi ab .

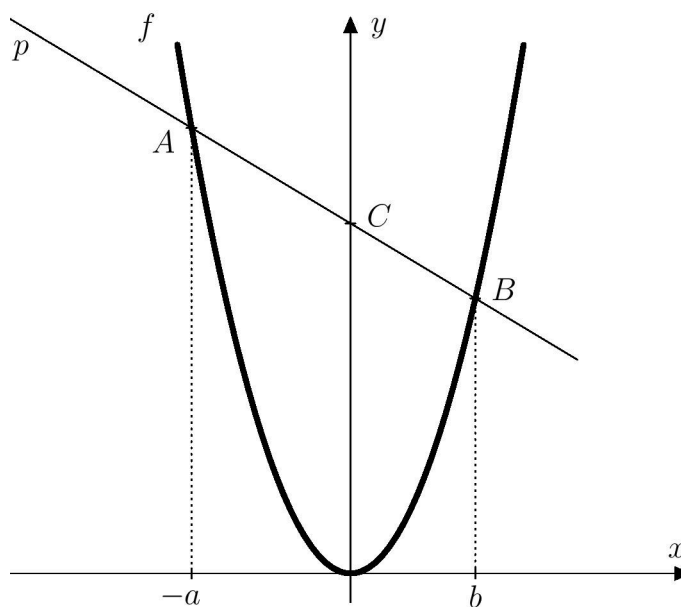
Procedurę można wypróbować w załączonym arkuszu, jego ilustracje są również dostępne w programie GeoGebra. Interaktywny aplet można znaleźć na stronie internetowej <https://www.geogebra.org/m/sj5cjbaf>.

Zadanie. Czy powyższa procedura ma zastosowanie do wszystkich par czy tylko do niektórych? Czy tę procedurę można udowodnić?

Rozwiązanie. Z procedury wynika, że jeśli obrazy liczb $-a$ i b łączą się, linia opisana w trzecim kroku nie może być jednoznacznie skonstruowana. Dlatego podana procedura nie zadziała, jeśli $-a = b$. My pokażemy, że poza tym przypadkiem, procedura działa dla wszystkich innych par liczb a i b .

Skonstruujmy, zgodnie z podaną procedurą, na osi x punkty odpowiadające liczbom $-a$ i $-b$, a następnie skonstruujmy w tych punktach proste prostopadłe do osi x . Oznaczmy przecięcia tych prostopadłych z parabolą przez A i B , a linię prostą AB oznaczmy przez p . Prosta p przecina oś y w punkcie C , który wyznacza nieznaną liczbę m .

¹Ogólnie rzecz biorąc, wykresy, które pozwalają nam wykonywać operacje arytmetyczne za pomocą konstrukcji geometrycznych nazywane są *nomogramami*.



Rysunek 1: Ilustracyjny obraz

Prosta p jest określona przez punkty $A(-a; a^2)$ i $B(b; b^2)$, więc wektor kierunku to

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = [b + a; b^2 - a^2].$$

Mnożąc wektor $\vec{v}$ przez liczbę $\frac{1}{a+b}$ otrzymujemy

$$\vec{u} = [1; b - a].$$

Korektę tę można wykonać, ponieważ w naszym przypadku $b \neq -a$, a więc $b + a \neq 0$. W ten sposób otrzymujemy równania parametryczne

$$\begin{aligned} p: X &= B + t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R} \\ p: x &= b + t \\ y &= b^2 + t \cdot (b - a), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Podstawiając współrzędne punktu C po lewej stronie równań (tj. $x = 0, y = m$) otrzymujemy układ

$$\begin{aligned} 0 &= b + t \\ m &= b^2 + t(b - a). \end{aligned}$$

Z pierwszego równania mamy $t = -b$ i podstawiamy je do drugiego równania. Stąd

$$\begin{aligned} m &= b^2 + (-b) \cdot (b - a) \\ m &= ab. \end{aligned}$$

Jest to wynik, który musieliśmy udowodnić.