

Calculadora de parábola

Keywords: geometría analítica, ecuación paramétrica de la recta

Navegando por Internet, Eva ha encontrado un dato interesante sobre la gráfica de una función $f: y = x^2$ y es que la gráfica se puede utilizar como calculadora para multiplicar dos números a y b .¹ El procedimiento es el siguiente:

1. En el eje x marca los puntos correspondientes a los números $-a$ y b .
2. En estos puntos, traza rectas perpendiculares al eje x y construye sus intersecciones con la gráfica de la función f .
3. La recta que pasa por las intersecciones recién construidas interseca al eje y en un punto cuya distancia al origen es ab .

Puedes probar el procedimiento en la hoja de trabajo adjunta, sus ilustraciones también están disponibles en GeoGebra. El applet interactivo se encuentra en el sitio web: <https://www.geogebra.org/m/sj5cjbaf>.

Ejercicio. ¿Se aplica el procedimiento anterior a todos los pares de números, o sólo a algunos? ¿Puede demostrarse este procedimiento?

Solución. Del procedimiento se deduce que si las imágenes de los números $-a$ y b se fusionan, la recta descrita en el tercer paso no se puede construir de forma única. Por lo tanto, el procedimiento dado no funcionará si $-a = b$ se cumple. Demostraremos que, además de este caso, el procedimiento es válido para todos los demás pares de números a y b .

Construyamos, según el procedimiento dado, en el eje x los puntos correspondientes a los números $-a$ y $-b$, y luego construyamos perpendiculares en estos puntos al eje x . Denotamos las intersecciones de estas perpendiculares con la parábola por A y B , y la recta AB por p . La recta p corta al eje y en el punto C , que determina la incógnita m .

¹En general, las gráficas que nos permiten realizar operaciones aritméticas mediante construcciones geométricas se denominan *nomogramas*.

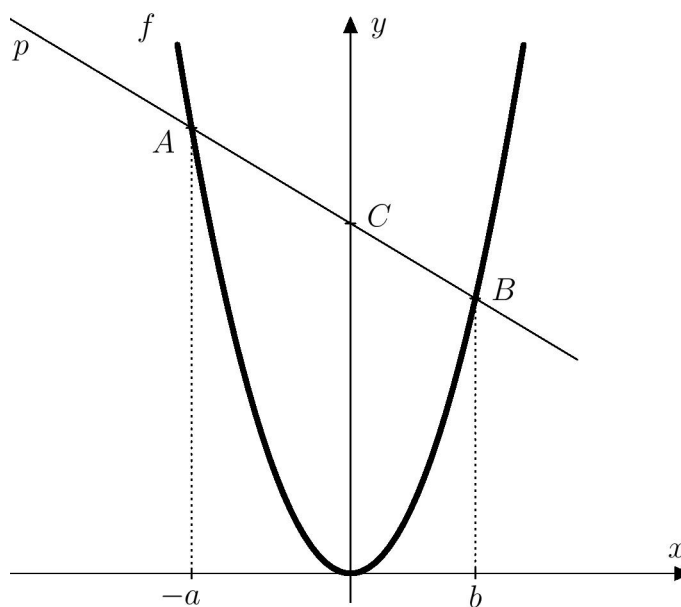


Figura 1: Imagen ilustrativa

La recta p está definida por los puntos $A(-a; a^2)$ y $B(b; b^2)$, por lo que el vector de dirección es

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = [b + a; b^2 - a^2].$$

Multiplicando el vector $\vec{v}$ por el número $\frac{1}{a+b}$ obtenemos

$$\vec{u} = [1; b - a].$$

Este ajuste se puede hacer ya que en nuestro caso es $b \neq -a$, y por tanto $b + a \neq 0$. Así, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$p: X = B + t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R}$$

$$p: x = b + t$$

$$y = b^2 + t \cdot (b - a), t \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo las coordenadas del punto C en los lados izquierdos de las ecuaciones (es decir, $x = 0$, $y = m$) obtenemos el sistema

$$0 = b + t$$

$$m = b^2 + t(b - a).$$

A partir de la primera ecuación, expresamos $t = -b$ y la sustituimos en la segunda ecuación. A partir de aquí

$$m = b^2 + (-b) \cdot (b - a)$$

$$m = ab.$$

Este es el resultado que necesitábamos demostrar.