

Parabolická kalkulačka

Keywords: analytická geometrie, parametrická rovnice přímky

Eva našla při surfování na internetu jednu zajímavost týkající se grafu funkce $f: y = x^2$, který může posloužit jako kalkulačka k vynásobení dvou čísel a a b .¹ Postup je následující:

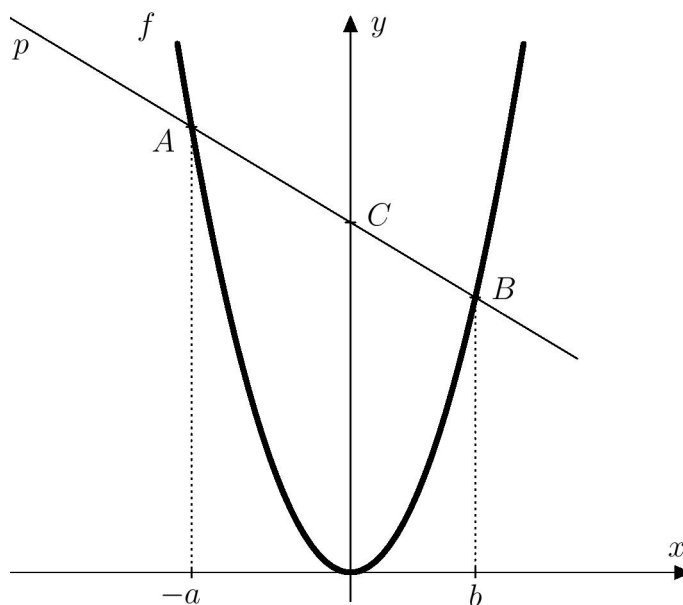
1. Na ose x se vyznačí obrazy čísel $-a$ a b .
2. V těchto bodech se vztyčí kolmice k ose x a sestrojí se její průsečíky s grafem funkce f .
3. Přímka procházející právě sestrojenými průsečíky protne osu y v bodě, jehož vzdálenost od počátku je ab .

Uvedený postup si můžete vyzkoušet v přiloženém pracovním listu, jeho ilustrace je možná také v GeoGebra. Interaktivní applet najdete na stránkách <https://www.geogebra.org/m/sj5cjbaF>.

Úloha. Platí výše uvedený postup pro všechny dvojice čísel, nebo jen pro některé? Dá se tento postup dokázat?

Řešení. Z postupu je patrné, že jestliže obrazy čísel $-a$ a b splynou, přímku popisovanou ve třetím bodě nebude možné jednoznačně sestrojit. Uvedený postup proto nebude fungovat, bude-li platit $-a = b$. Ukážeme, že kromě tohoto případu platí postup pro všechny ostatní dvojice čísel a a b .

Sestrojme na ose x dle postupu ze zadání obraz čísla $-a$ a b a dále vztyčme v těchto bodech kolmice k ose x . Průsečíky těchto kolmic s parabolou označme A a B , přímku AB pak označme jako p . Přímka p protíná osu y v bodě C , který určuje neznámé číslo m .



Obrázek 1: K důkazu

¹Obecně se grafům, díky kterým můžeme provádět aritmetické operace geometrickými konstrukcemi, říká *nomogramy*.

Results matter!

Přímka p je dána dvěma body $A[-a; a^2]$ a $B[b; b^2]$, tedy směrový vektor je

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (b + a; b^2 - a^2).$$

Vynásobením vektoru $\vec{v}$ číslem $\frac{1}{a+b}$ dostaneme

$$\vec{u} = (1; b - a).$$

Tuto úpravu je možné provést, neboť pro náš případ $b \neq -a$ je $b + a \neq 0$. Dostáváme tak parametrické rovnice

$$\begin{aligned} p: X &= B + t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R} \\ p: x &= b + t \\ y &= b^2 + t \cdot (b - a), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dosazením souřadnic bodu C do levých stran rovnic (tj. $x = 0, y = m$) dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= b + t \\ m &= b^2 + t(b - a). \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $t = -b$ a dosadíme do druhé rovnice. Odsud

$$\begin{aligned} m &= b^2 + (-b) \cdot (b - a) \\ m &= ab, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.