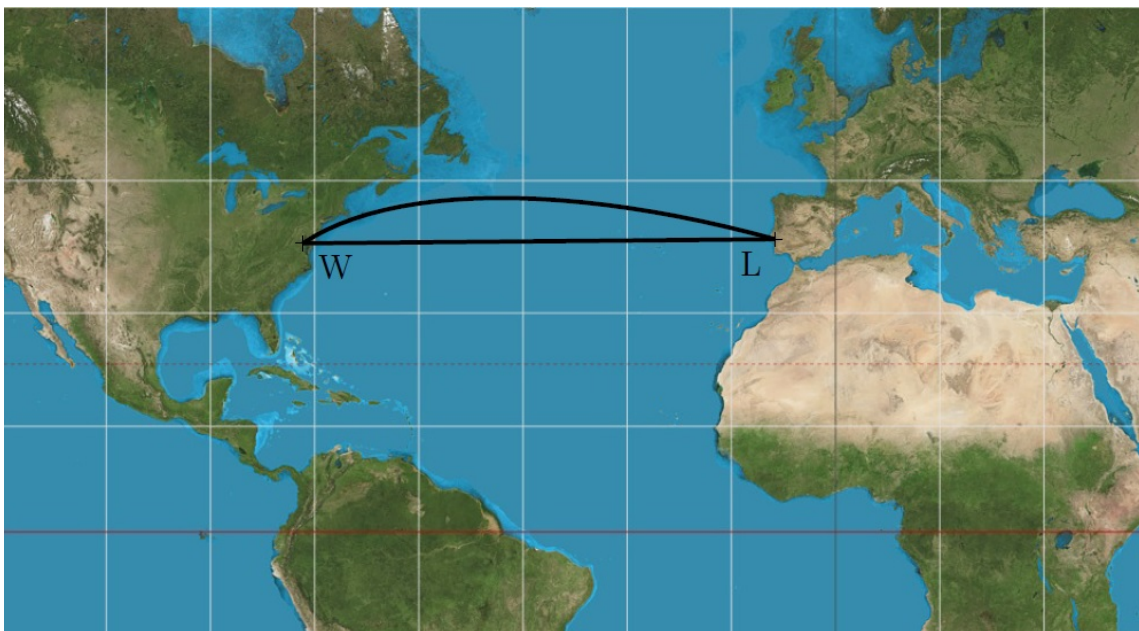


Vzdialenosti na zemskom povrchu

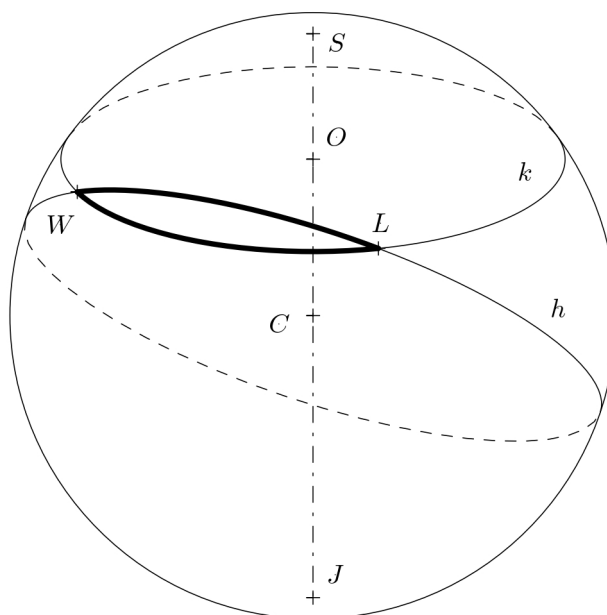
Keywords: geometria v priestore, stereometria, planimetria, kružnica, geografia

Ktorá z trás medzi Lisabonom a Washingtonom zobrazených na mape je kratšia?



Obr. 1: Mapa

V tejto úlohe uvidíte, že táto zdanlivo jednoduchá otázka má prekvapujúcu odpoveď. Kratšia trasa je oblúk a dlhšia je úsečka. Dôvodom je skreslenie vzdialeností vo zvolenom zobrazení zemského povrchu. Vidíme, že úsečka LW na mape je približne rovnobežná s geografickými rovnobežkami na Zemi. V skutočnosti teda zodpovedá oblúku na kružnici a veľmi sa podobá rovnobežke (pozri kružnicu k so stredom O na obrázku).



Obr. 2: Rovnobežka a hlavná kružnica

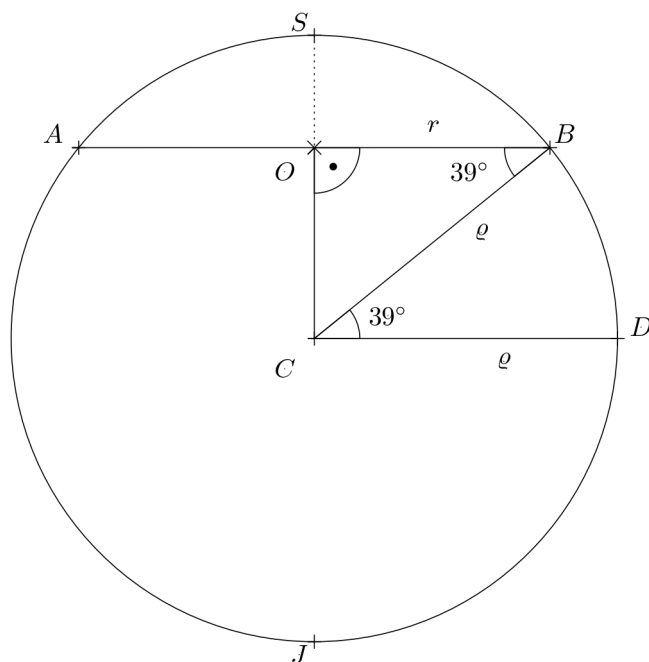
Avšak na guľovom povrchu (ktorý v tejto úlohe budeme považovať za zemský povrch) je najkratšou vzdialenosťou iný oblúk. Tento oblúk je časťou kružnice h , ktorej stred C je stredom Zeme. Takéto trasy nazývame orthodrómy a všetky kružnice s touto vlastnosťou označujeme ako *hlavné kružnice*. Koľko kilometrov ušetríme, ak budeme cestovať po orthodróme? Odpoveď na túto otázku je potrebné vypočítať.

Slovníček

- *Zemepisná šírka* miesta na zemskom povrchu (vyjadrená v stupňoch a orientácii sever/juh) je odchýlka priamky, ktorá prechádza daným miestom a stredom Zeme, od roviny rovníka.
- *Zemepisná dĺžka* miesta na zemskom povrchu (vyjadrená v stupňoch a orientácii východ/západ) je odchýlka roviny poludníka, ktorý prechádza daným miestom, od roviny nultého poludníka.

Úloha. Lisabon a Washington sa nachádzajú približne na rovnakej rovnobežke (približne 39° severnej zemepisnej šírky). Koľko kilometrov ušetrí lietadlo, ak poletí po orthodrómickej dráhe v porovnaní s letom po rovnobežke? Lisabon sa nachádza približne na 9° západnej zemepisnej dĺžky. Washington sa nachádza na 77° západnej zemepisnej dĺžky. Predpokladajme, že Zem je guľa so stredom C a polomerom 6 371 km a že lietadlo letí v priemernej výške 10 km (vzlet a pristátie neuvažujeme). Vo všetkých úvahách teda budeme pracovať s guľou o polomere $\varrho = 6\,381$ km.

Riešenie. Najskôr určíme, koľko kilometrov preletí lietadlo pri ceste po rovnobežke. Označme rovnobežku na 39° severnej šírky ako kružnicu k so stredom O a polomerom r . Vo vhodnom pravouhlom prieniku zemegule (pozri obrázok, kde S a J sú póly) sa uvedená kružnica zobrazí ako úsečka AB so stredom O .

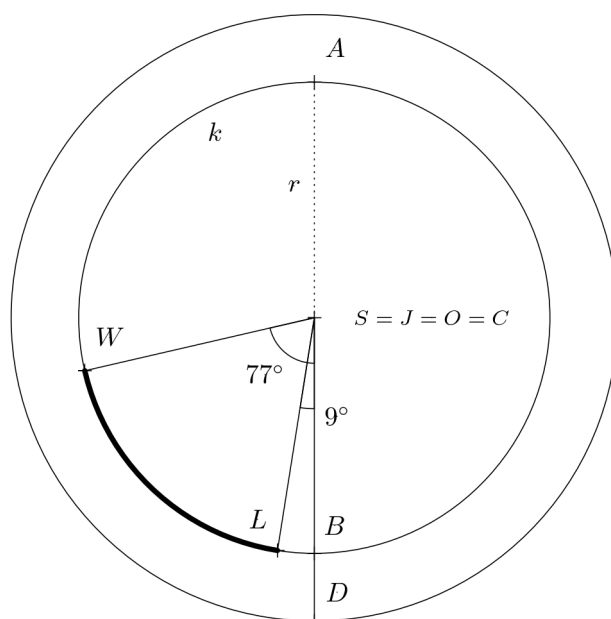


Obr. 3: Pravoúhlý priemet

Z obrázku je zrejmá rovnosť $|\sphericalangle CBO| = |\sphericalangle BCD|$ (uhly sú striedavé) a využitím funkcie kosínus v pravouhlom trojuholníku BSO dostávame $r = \varrho \cdot \cos 39^\circ$.

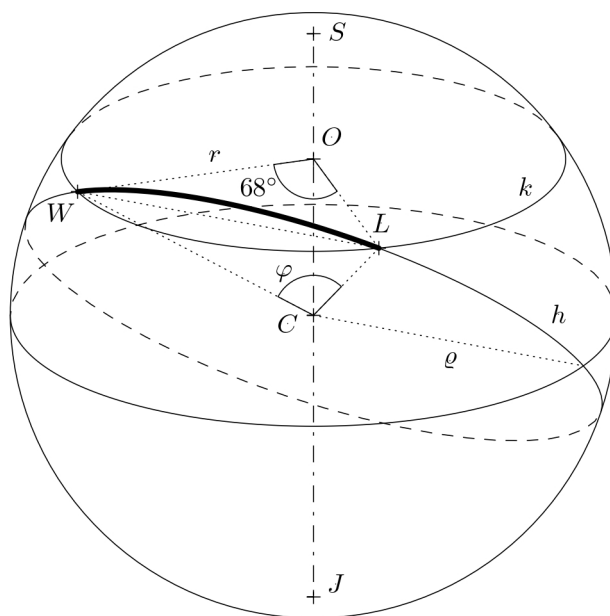
Trajektória lietadla pohybujúceho sa po rovnobežke (na obrázku nižšie je trajektória lietadla znázornená kratším oblúkom LW) sa určí pomocou priamej úmernosti: celá kružnica k má dĺžku $2\pi r = 2\pi \varrho \cdot \cos 39^\circ \text{ km}$, čiže dĺžka kratšieho oblúka LW sa rovná

$$\frac{(77 - 9)}{360} \cdot 2\pi \varrho \cdot \cos 39^\circ \doteq 5\,885,4 \text{ km.}$$



Obr. 4: Prekrývanie pólov v rovinnej projekcii s pravouhlým zobrazením

Teraz určíme, koľko kilometrov lietadlo preletí po ortodrome. Ide v podstate o vzdialenosť medzi dvoma bodmi na pomyselnéj guľi s polomerom $\varrho = 6\,381$ km. Obrázok ukazuje, že ortodroma medzi bodmi L a W je istý oblúk hlavnej kružnice h s neznámym stredovým uhlom φ . Potrebujeme určiť veľkosť tohto uhla.



Obr. 5: Ortodroma spojujúci Lisabon (L) a Washington (W)

Results matter!

Uvažme rovnoramenný trojuholník OWL , ktorý rozdelíme výškou na základnu LW na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. V ľubovoľnom z týchto dvoch trojuholníkov platí $\frac{|LW|}{2} = r \cdot \sin 34^\circ$, a preto $|LW| = 2r \cdot \sin 34^\circ$. Ak budeme uvažovať podobne pre rovnoramenný trojuholník CWL , dostaneme rovnosť $|LW| = 2\rho \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$. Porovnaním pravých strán oboch odvodených rovností vypočítame hľadaný uhol φ :

$$2r \sin 34^\circ = 2\rho \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r \sin 34^\circ}{\rho} = \frac{\rho \cos 39^\circ \sin 34^\circ}{\rho} = \cos 39^\circ \sin 34^\circ$$

$$\frac{\varphi}{2} = \arcsin(\cos 39^\circ \sin 34^\circ) \doteq 25^\circ 45' \Rightarrow \varphi \doteq 51^\circ 30'.$$

Dráhu lietadla pohybujúceho sa po ortodrome určujeme podobne ako v prípade rovnobežky, teda priamou úmerou. Dĺžka celej kružnice h je rovná $2\pi\rho$. Pre dĺžku kratšieho oblúka LW potom platí

$$\frac{51,5}{360} \cdot 2\pi\rho \doteq 5\,735,5 \text{ km}.$$

Vidíme, že sa dráhy líšia približne o 150 km.

Literatúra

- Novák V., Murdych Z. *Kartografie a topografie*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. (1988)
- Hradecký F., Koman M., Vyšín J. *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*. Praha: Škola mladých matematiků. (1977). 36–38.

Zdroje obrázkov

- Mercator projection. Strebe – Vlastní dílo, CC BY-SA 4.0, dostupné z https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mercator_projection_Square.JPG [cit. 14. 8. 2023]