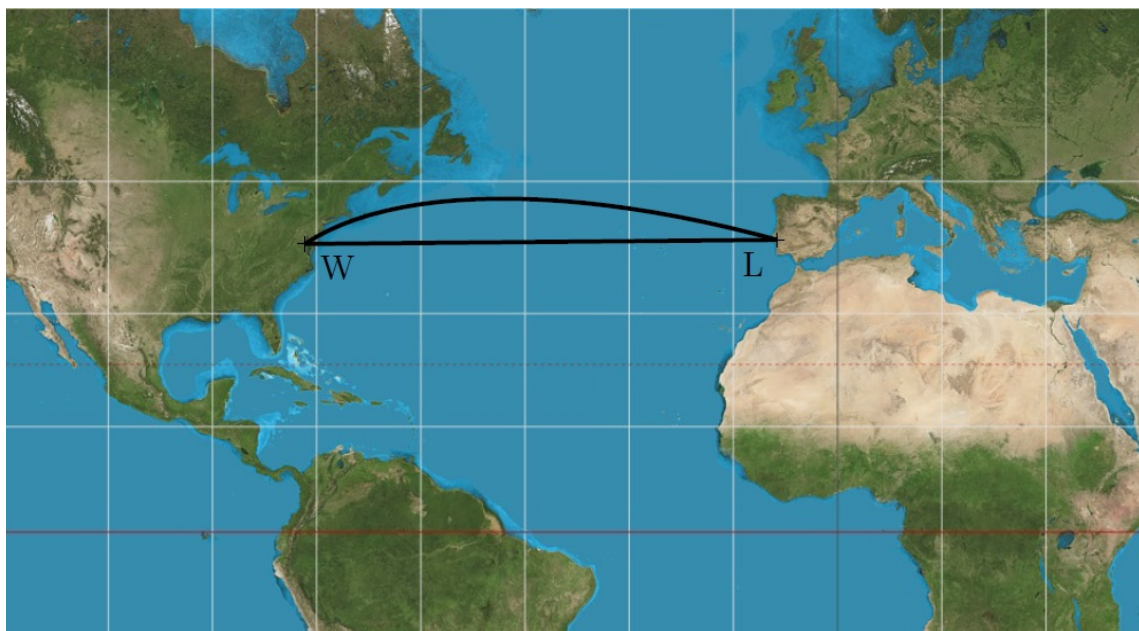


Odległości na powierzchni Ziemi

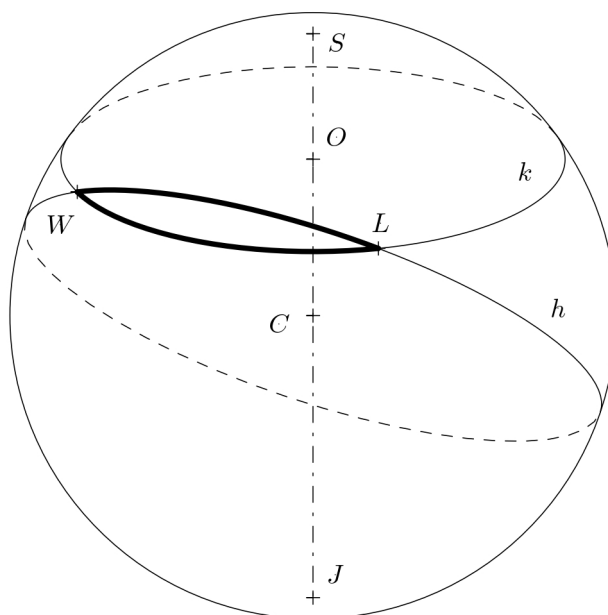
Keywords: geometria w przestrzeni, stereometria, planimetria, okrąg, geografia

Która z tras między Lizboną a Waszyngtonem pokazanych na mapie jest krótsza?



Rysunek 1: Map

To pozornie proste pytanie ma zaskakującą odpowiedź, o czym przekonasz się w tym ćwiczeniu. Krótsza trasa to łuk, a dłuższa to odcinek linii. Powodem jest zniekształcenie odległości w wybranej reprezentacji powierzchni Ziemi. Widzimy, że odcinek linii LW na mapie jest w przybliżeniu równoległy do równoleżników geograficznych na Ziemi, więc w rzeczywistości odpowiada łukowi na okręgu, który bardzo przypomina równoleżnik. (patrz okrąg k ze środkiem O na rysunku).



Rysunek 2: Równoległe i wielkie koło

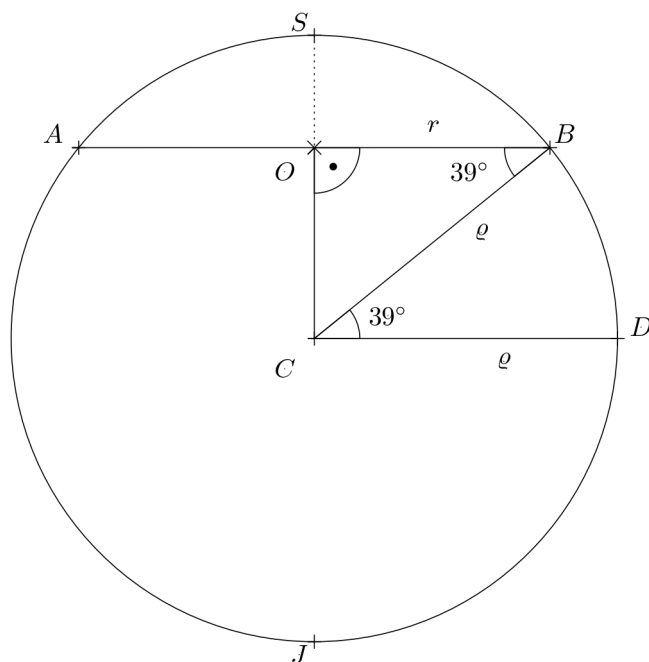
Jednak na powierzchni kulistej (którą w tym zadaniu uznamy za powierzchnię Ziemi), najkrótszą odległością jest inny łuk. Łuk ten jest częścią okręgu h , którego środkiem C jest środek Ziemi. Odnosimy się do takich ścieżek jako *ortodromy* i nazywamy wszystkie okręgi z tą właściwością *wielkimi okręgami*. Ile kilometrów zaoszczędzimy podróżując wzdłuż ortodromy? Odpowiedź na to pytanie należy obliczyć.

Słownik

Szerokość geograficzna punktu na powierzchni Ziemi (wyrażona w stopniach i orientacji północ/południe) to kąt pomiędzy linią prostą przechodzącą przez dany punkt a środkiem Ziemi i płaszczyznę równika. **Długość geograficzna** punktu na powierzchni Ziemi (wyrażona w stopniach i orientacji wschód / zachód) to kąt między płaszczyzną południka przechodzącego przez dany punkt a płaszczyzną południka zerowego.

Zadanie. Lizbona i Waszyngton znajdują się mniej więcej na tym samym równoleżniku w przybliżeniu na tym samym równoleżniku (ok. 39° szerokości geograficznej północnej). Ile kilometrów oszczędza samolot podróżując ścieżką ortodromiczną w porównaniu do podróży ścieżką równoległą? Lizbona jest położona na wysokości ok. 9° długości geograficznej zachodniej. Waszyngton znajduje się pod 77° długości zachodniej. Załóżmy, że Ziemia jest kulą o środku C i promieniu 6371 km i że samolot leci na średniej wysokości 10 km (start i lądowanie nie są brane pod uwagę). Dlatego we wszystkich rozważaniach będziemy pracować z kulą o promieniu $\rho = 6381$ km.

Rozwiązanie. Najpierw określmy, ile kilometrów pokona samolot, podróżując wzdłuż równoleżnika. Oznaczmy równoleżnik jako 39° szerokość geograficzna północna jako okrąg k ze środkiem O i promień r . W odpowiednim rzucie ortogonalnym kuli ziemskiej (patrz rysunek, gdzie S i J są biegunami), okrąg ten jest cięciwą AB o środku O .

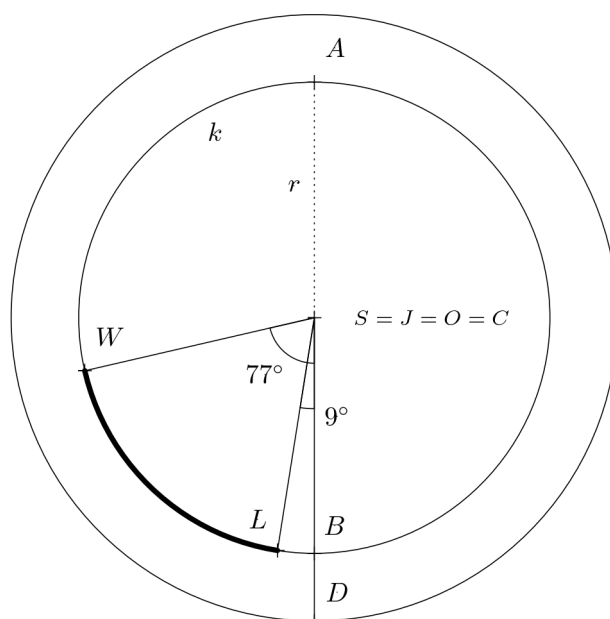


Rysunek 3: Rzut prostokątny

Rysunek przedstawia równość $|\angle CBO| = |\angle BCD|$ (kąty są naprzemienne) i używając funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym BSO otrzymujemy $r = \rho \cdot \cos 39^\circ$.

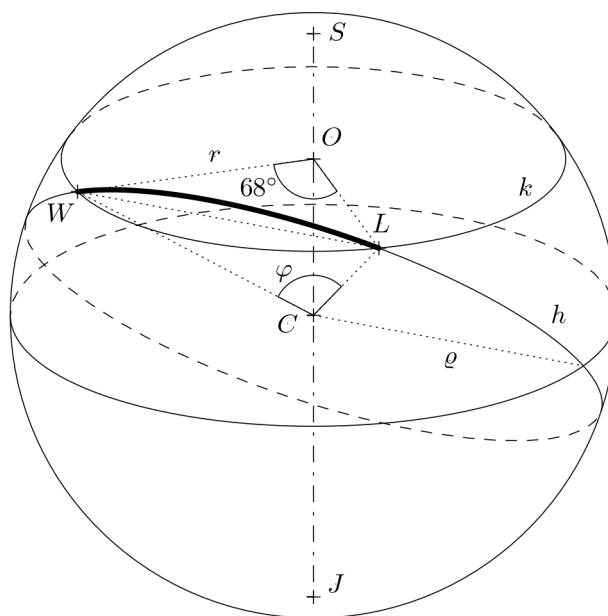
Trajektoria samolotu poruszającego się wzdłuż równoleżnika (na poniższym rysunku, trajektoria samolotu jest reprezentowana przez krótszy łuk LW) jest określana przy użyciu bezpośredniej proporcji: cały okrąg k ma długość $2\pi r = 2\pi \rho \cdot \cos 39^\circ$ km, tzn. długość krótszego łuku LW jest równa

$$\frac{(77-9)}{360} \cdot 2\pi \varrho \cdot \cos 39^\circ \doteq 5\,885,4 \text{ km.}$$



Rysunek 4: Rzut prostokątny - nakładanie się biegunów.

Teraz określamy, ile kilometrów pokonuje samolot, poruszając się wzdłuż ortodromy. Jest to zasadniczo odległość między dwoma punktami na wyimaginowanej kuli o promieniu $\varrho = 6381$ km. Rysunek pokazuje, że ortodroma między punktami L i W jest łukiem pewnego koła wielkiego h o nieznanym kącie środkowym φ . Musimy określić miarę tego kąta.



Rysunek 5: Odległość po ortodromie między Lizboną (L) a Waszyngtonem (W)

Results matter!

Rozważmy trójkąt równoramienny OWL , który podzielimy wysokością na podstawę LW na dwa przystające trójkąty prostokątne. W każdym z tych dwóch trójkątów zachodzi równanie $\frac{|LW|}{2} = r \cdot \sin 34^\circ$ utrzymuje, a zatem $|LW| = 2r \cdot \sin 34^\circ$. Jeśli zastosujemy podobne rozumowanie dla trójkąta równoramiennego CWL , otrzymujemy równość $|LW| = 2\rho \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$. Porównując prawe strony obu wyprowadzonych równości, obliczamy wymagany kąt φ :

$$2r \sin 34^\circ = 2\rho \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r \sin 34^\circ}{\rho} = \frac{\rho \cos 39^\circ \sin 34^\circ}{\rho} = \cos 39^\circ \sin 34^\circ$$

$$\frac{\varphi}{2} = \arcsin(\cos 39^\circ \sin 34^\circ) \doteq 25^\circ 45' \Rightarrow \varphi \doteq 51^\circ 30'.$$

Wyznaczamy trajektorię samolotu poruszającego się wzdłuż ortodromy w podobny sposób jak w przypadku linii równoległej, korzystając z proporcji bezpośredniej. Długość całego okręgu h jest równa $2\pi\rho$. Następnie, dla długości krótszego łuku LW , stosuje się następujące obliczenia

$$\frac{51,5}{360} \cdot 2\pi\rho \doteq 5\,735,5 \text{ km}.$$

Widzimy, że obie trajektorie różnią się o ok. 150 km.

Literatura

- Novák V., Murdych Z. *Kartografia i topografia*. Praga.
- Hradecký F., Koman M., Vyšín J.*Kilka problemów z geometrii prostych brył.

Źródła danych

- Projekcja Mercatora. Strebe - Praca własna, CC BY-SA 4.0, dostępny na https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mercator_projection_Square.JPG [cytowany 14 sierpnia 2023]