

Distancias en la superficie de la Tierra

Keywords: geometría en el espacio, estereometría, planimetría, círculo, geografía

¿Cuál de las rutas entre Lisboa y Washington que se muestran en el mapa es más corta?

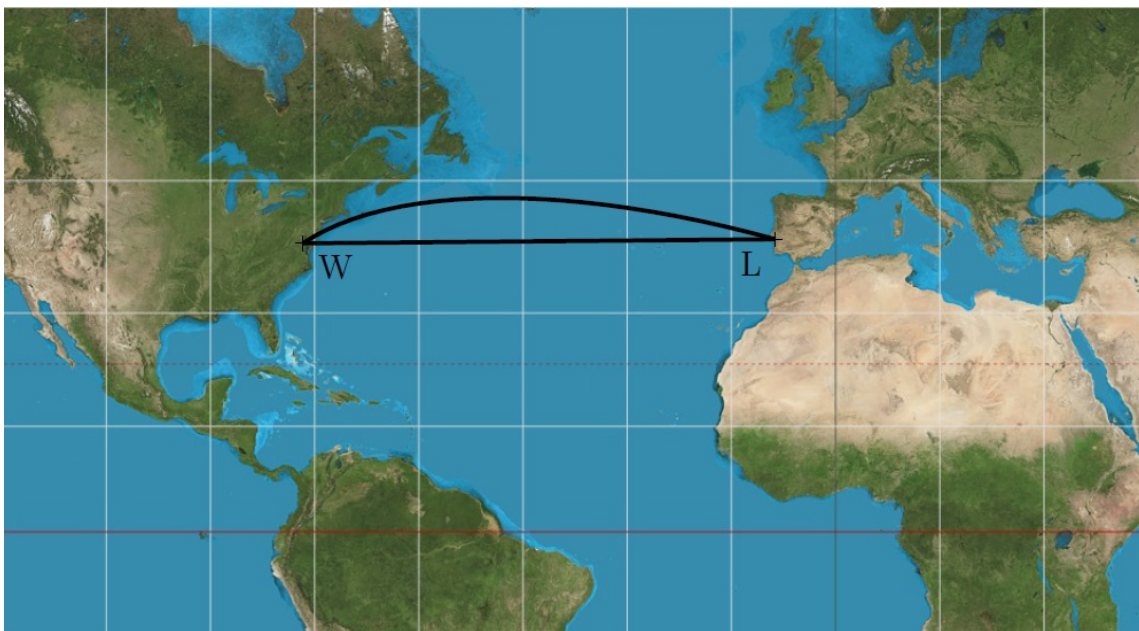


Figura 1: Mapa

Esta pregunta aparentemente sencilla tiene una respuesta sorprendente, como verás en este ejercicio. La ruta más corta es el arco, la más larga es el segmento de línea. La razón es la distorsión de las distancias en la representación seleccionada de la superficie terrestre. Vemos que el segmento de línea LW en el mapa es aproximadamente paralelo a los paralelos geográficos de la Tierra, por lo que en realidad corresponde a un arco de un círculo que se asemeja mucho a un paralelo (ver el círculo k con centro O en la figura).

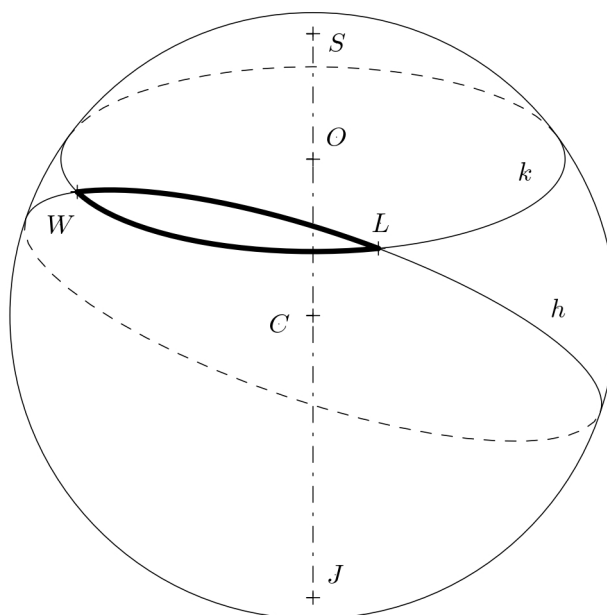


Figura 2: Paralelo y círculo máximo

Sin embargo, en la superficie esférica (que en esta tarea consideraremos como la superficie de la Tierra), la distancia más corta es otro arco. Este arco forma parte de un círculo h cuyo centro C es el centro de la Tierra. A este tipo de trayectos los llamamos *ortodromias* y llamamos *círculos máximos* a todos los círculos con esta propiedad. ¿Cuántos kilómetros se ahorran al viajar por una ortodromia? La respuesta a esta pregunta debe calcularse.

Diccionario

- *Latitud* de un punto en la superficie de la Tierra (expresada en grados y orientación norte/sur) es el ángulo entre una línea recta que pasa por el punto dado y el centro de la Tierra, y el plano ecuatorial.
- *Longitud* de un punto en la superficie de la Tierra (expresada en grados y orientación este/oeste) es el ángulo entre el plano del meridiano que pasa por el punto dado y el plano del meridiano cero.

Ejercicio. Lisboa y Washington están ubicadas aproximadamente en el mismo paralelo (unos 39° de latitud norte). ¿Cuántos kilómetros ahorra un avión al viajar por una trayectoria ortodrómica en comparación con una trayectoria por el paralelo? Lisboa se encuentra aproximadamente en la longitud oeste de 9° . Washington está ubicada en la longitud oeste de 77° . Supongamos que la Tierra es una esfera con centro C y radio 6,371, km, y que el avión vuela a una altitud media de 10, km (no se tienen en cuenta el despegue y el aterrizaje). Por lo tanto, en todas las consideraciones, trabajaremos con una esfera de radio $\varrho = 6,381$, km.

Solución. Primero, determinemos cuántos kilómetros recorrerá el avión al viajar a lo largo del paralelo. Denotemos el paralelo a 39° de latitud norte como un círculo k con centro O y radio r . En una proyección ortogonal apropiada del globo (véase la figura, donde S y J son los polos), este círculo aparece como una cuerda AB con centro O .

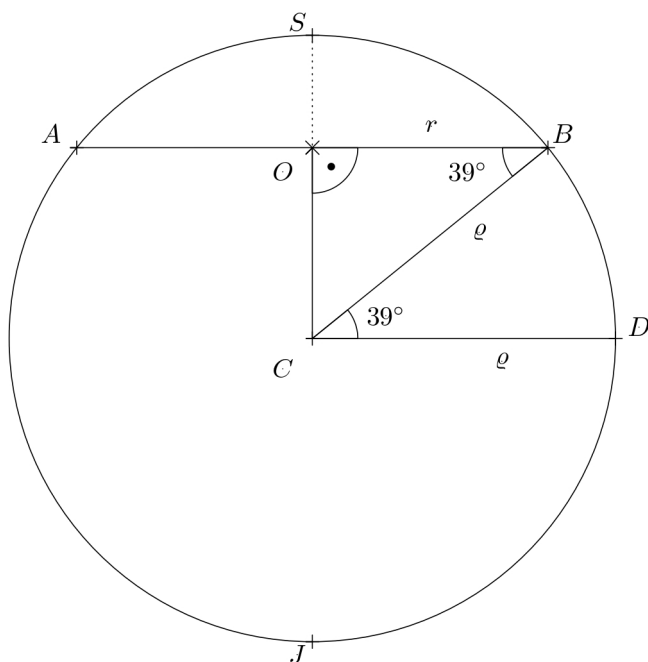


Figura 3: Proyección rectangular

La figura muestra la igualdad $|\angle CBO| = |\angle BCD|$ (los ángulos son alternos) y, utilizando la función coseno en el triángulo rectángulo BSO , obtenemos que $r = \rho \cdot \cos 39^\circ$.

La trayectoria del avión que se mueve a lo largo del paralelo (en la figura de abajo, la trayectoria del avión está representada por el arco más corto LW) se determina utilizando una proporción directa: el círculo completo k tiene una longitud de $2\pi r = 2\pi \varrho \cdot \cos 39^\circ$, km, es decir, la longitud del arco más corto LW es igual a

$$\frac{(77-9)}{360} \cdot 2\pi \varrho \cdot \cos 39^\circ \doteq 5,885.4 \text{ km.}$$

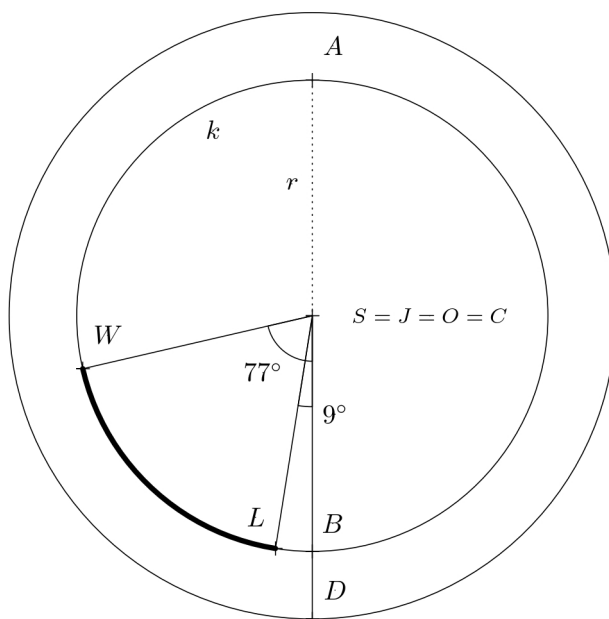


Figura 4: Proyección rectangular - superposición de los polos.

Ahora determinamos cuántos kilómetros recorre el avión al desplazarse por la ortodromia. Esta es esencialmente la distancia entre dos puntos sobre una esfera imaginaria con radio $\varrho = 6,381$, km. La figura muestra que la ortodromia entre los puntos L y W es un arco de cierto círculo máximo h con un ángulo central desconocido φ . Necesitamos determinar la medida de este ángulo.

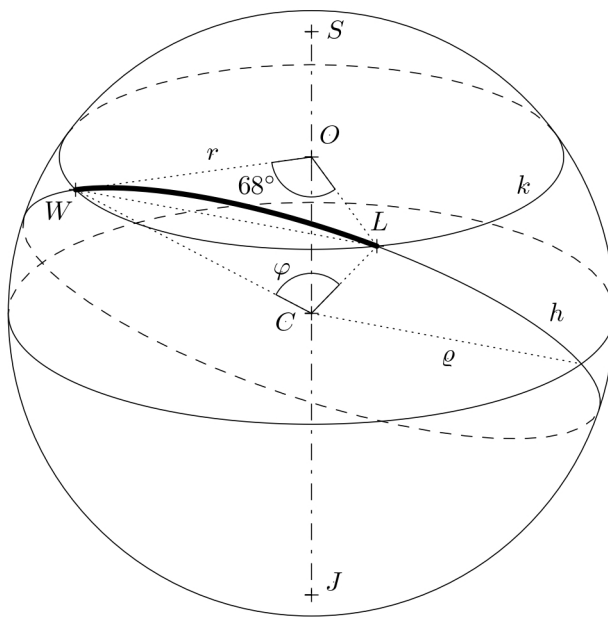


Figura 5: Distancia ortodrómica entre Lisboa (L) y Washington (W)

Results matter!

Consideremos un triángulo isósceles OWL , que dividimos por la altura trazada a la base LW en dos triángulos rectángulos congruentes. En cualquiera de estos dos triángulos, se cumple la ecuación $\frac{|LW|}{2} = r \cdot \sin 34^\circ$, y por lo tanto $|LW| = 2r \cdot \sin 34^\circ$. Si seguimos un razonamiento similar para el triángulo isósceles CWL , obtenemos la igualdad $|LW| = 2\rho \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$. Al comparar los lados derechos de ambas igualdades derivadas, calculamos el ángulo requerido φ :

$$2r \sin 34^\circ = 2\rho \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r \sin 34^\circ}{\rho} = \frac{\rho \cos 39^\circ \sin 34^\circ}{\rho} = \cos 39^\circ \sin 34^\circ$$

$$\frac{\varphi}{2} = \arcsin(\cos 39^\circ \sin 34^\circ) \doteq 25^\circ 45' \Rightarrow \varphi \doteq 51^\circ 30'.$$

Determinamos la trayectoria del avión que viaja por la ortodromia de manera similar a como lo hicimos en el caso del paralelo, utilizando una proporción directa. La longitud del círculo completo h es igual a $2\pi\rho$. Entonces, para la longitud del arco más corto LW , se aplica el siguiente cálculo:

$$\frac{51,5}{360} \cdot 2\pi\rho \doteq 5,735.5 \text{ km.}$$

Vemos que las dos trayectorias difieren en aproximadamente 150 km.

Bibliografía

- Novák V., Murdych Z. *Kartografie a topografie*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. (1988)
- Hradecký F., Koman M., Vyšín J. *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*. Praha: Škola mladých matematiků. (1977). 36–38.

Fuentes de figuras

- Mercator projection. Strebe – Vlastní dílo, CC BY-SA 4.0, disponible de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mercator_projection_Square.JPG [cit. 14. 8. 2023]