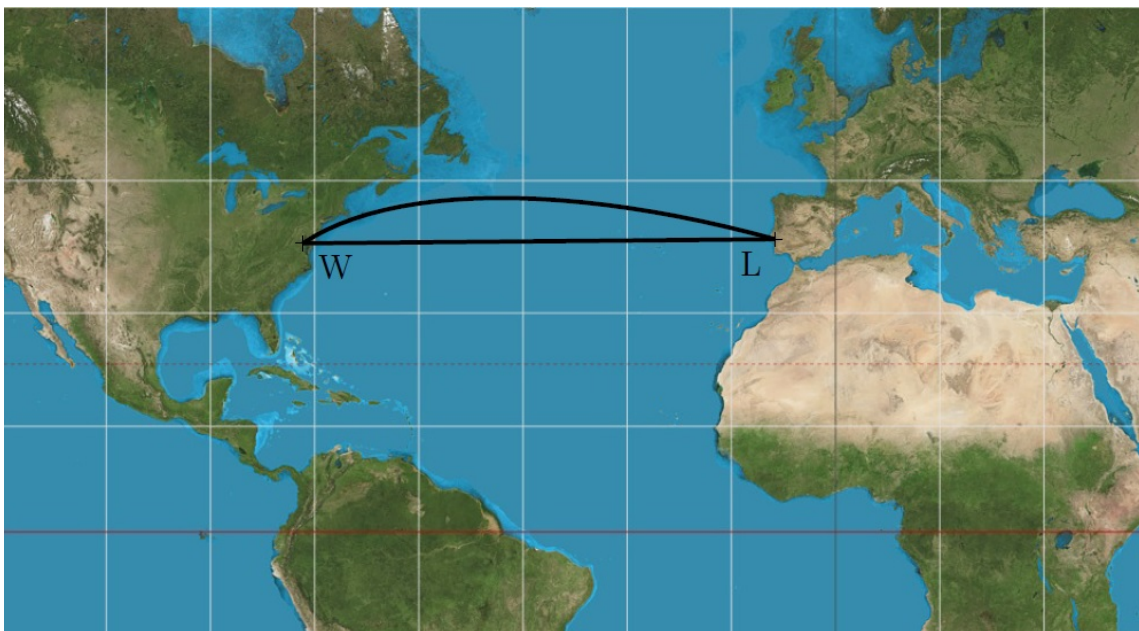


Vzdálenosti na zemském povrchu

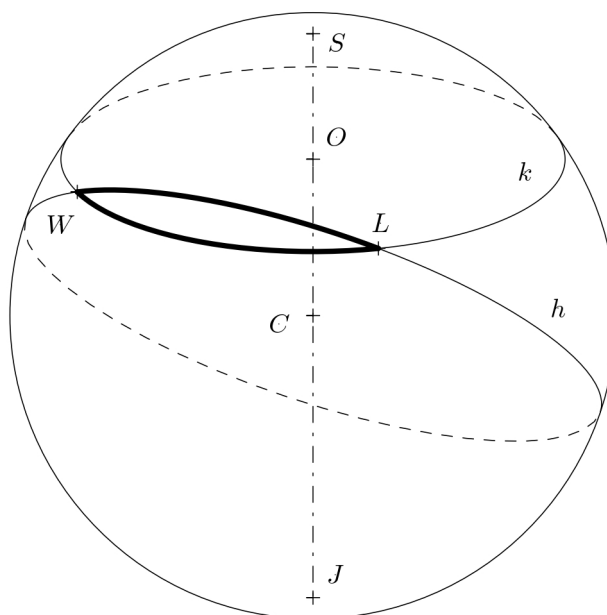
Keywords: *geometrie v prostoru, stereometrie, planimetrie, kružnice, zeměpis*

Která z cest mezi Lisabonem a Washingtonem znázorněných na mapě je kratší?



Obrázek 1: Mapa

Zdánlivě jednoduchý dotaz má, jak si ověříte v této úloze, překvapivou odpověď. Kratší trasa je oblouk, delší je úsečka. Důvodem je zkreslení vzdáleností ve zvoleném zobrazení zemského povrchu. Vidíme, že úsečka LW na mapě je přibližně rovnoběžná s geografickými rovnoběžkami na Zemi, tedy ve skutečnosti odpovídá oblouku na kružnici, která se velmi podobá rovnoběžce (viz kružnice k se středem O na obrázku).



Obrázek 2: Rovnoběžka a hlavní kružnice

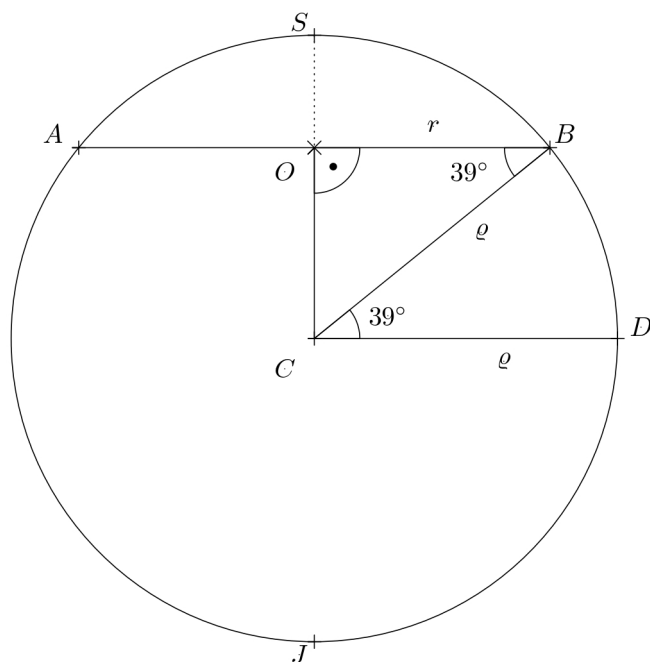
Na kulovém povrchu (který budeme v této úloze považovat za povrch Země) je však nejkratší vzdálenost jiný oblouk. Tento oblouk leží na kružnici h , jejíž střed C je středem Země. Takové spojnice označujeme jako *ortodromy* a všechny kružnice s uvedenou vlastností nazýváme *hlavními kružnicemi*. O kolik kilometrů si však cestou po ortodromě polepšíme? Odpověď na tuto otázku je již potřeba spočítat.

Slovníček

- *Zeměpisná šířka* místa na zemském povrchu (vyjádřená ve stupních a orientaci sever/jih) je odchylka přímky, která prochází daným místem a středem Země, od roviny rovníku.
- *Zeměpisná délka* místa na zemském povrchu (vyjádřená ve stupních a orientaci východ/západ) je odchylka roviny poledníku, který prochází daným místem, od roviny nultého poledníku.

Úloha. Lisabon i Washington se nachází přibližně na stejné rovníběžce (asi 39° severní šířky). O kolik kilometrů méně uletí letadlo pohybující se po ortodromě oproti cestě po rovníběžce? Lisabon se nachází na přibližně 9° západní délky, Washington na 77° západní délky. Předpokládejme, že je Země koulí se středem C a poloměrem $6\,371$ km a že letadlo letí v průměrné výšce 10 km (vzlet a přistání brát do úvahy nebudeme). Proto budeme ve všech úvahách pracovat s koulí o poloměru $\varrho = 6\,381$ km.

Řešení. Určeme nejdříve, kolik kilometrů urazí letadlo při cestě po rovníběžce. Označme rovníběžku na 39° severní šířky jako kružnici k se středem O a poloměrem r . Ve vhodném pravouhlém průmětu zeměkoule (viz obrázek, kde S a J jsou póly) se řečená kružnice zobrazí jako úsečka AB se středem O .

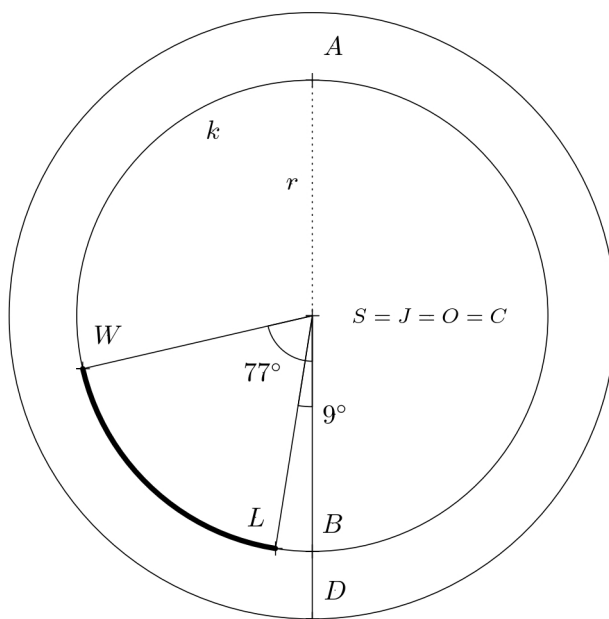


Obrázek 3: Pravoúhlý průmět

Z obrázku je zřejmá rovnost $|\sphericalangle CBO| = |\sphericalangle BCD|$ (úhly jsou střídavé) a užitím funkce kosinus v pravoúhlém trojúhelníku BSO dostáváme $r = \varrho \cdot \cos 39^\circ$.

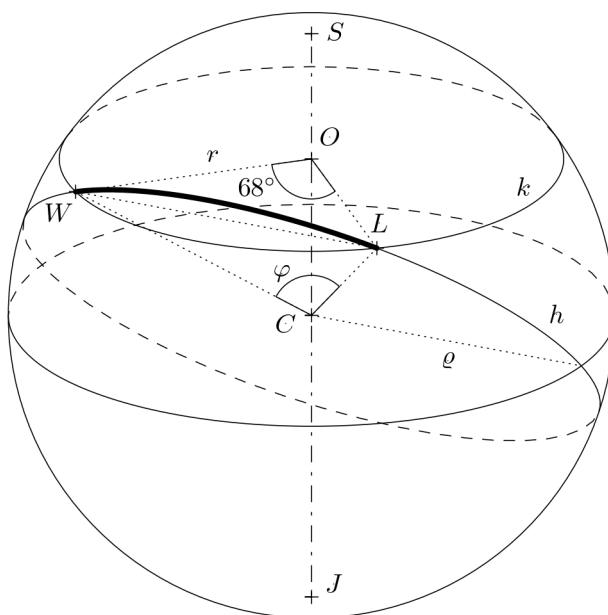
Dráhu letadla pohybujícího se po rovnoběžce (v obrázku níže je trajektorie letadla znázorněná kratším obloukem LW) určíme přímkou úměrou. Celá kružnice k má délku $2\pi r = 2\pi \varrho \cdot \cos 39^\circ$ km, tedy délka kratšího oblouku LW je rovna

$$\frac{(77-9)}{360} \cdot 2\pi \varrho \cdot \cos 39^\circ \doteq 5\,885,4 \text{ km.}$$



Obrázek 4: Pravoúhlý průmět - překryv pólů

Nyní zjistíme, kolik kilometrů uletí letadlo pohybující se po ortodromě. Jedná se vlastně o vzdálenost dvou bodů na pomyslné sféře o poloměru $\varrho = 6\,381$ km. Na obrázku lze vidět, že ortodroma mezi body L a W je obloukem jisté hlavní kružnice h s neznámým středovým úhlem φ . Tento úhel musíme určit.



Obrázek 5: Ortodroma spojující Lisabon (L) a Washington (W)

Results matter!

Uvažme rovnoramenný trojúhelník OWL , který rozpůlíme výškou na základnu LW na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. V libovolném z těchto dvou trojúhelníků pak platí $\frac{|LW|}{2} = r \cdot \sin 34^\circ$, a tedy $|LW| = 2r \cdot \sin 34^\circ$. Pokud provedeme podobnou úvahu pro rovnoramenný trojúhelník CWL , dostáváme rovnost $|LW| = 2\rho \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$. Porovnáním pravých stran obou odvozených rovností vypočítáme hledaný úhel φ :

$$2r \sin 34^\circ = 2\rho \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r \sin 34^\circ}{\rho} = \frac{\rho \cos 39^\circ \sin 34^\circ}{\rho} = \cos 39^\circ \sin 34^\circ$$

$$\frac{\varphi}{2} = \arcsin(\cos 39^\circ \sin 34^\circ) \doteq 25^\circ 45' \Rightarrow \varphi \doteq 51^\circ 30'.$$

Dráhu letadla pohybujícího se po ortodromě určíme podobně jako v případě rovnoběžky přímkou úměrou. Délka celé kružnice h je rovna $2\pi\rho$, pro délku kratšího oblouku LW pak platí

$$\frac{51,5}{360} \cdot 2\pi\rho \doteq 5\,735,5 \text{ km.}$$

Vidíme, že se obě dráhy liší přibližně o 150 km.

Literatura

- Novák V., Murdych Z. *Kartografie a topografie*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. (1988)
- Hradecký F., Koman M., Vyšín J. *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*. Praha: Škola mladých matematiků. (1977). 36–38.

Zdroje obrázků

- Mercator projection. Strebe – Vlastní dílo, CC BY-SA 4.0, dostupné z https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mercator_projection_Square.JPG [cit. 14. 8. 2023]