

Fraktálna geometria

Keywords: postupnosti a rady, geometrická postupnosť, fraktál, Kochova vložka

Fraktál je objekt vybudovaný pomocou rekúzie (jeho geometrická štruktúra sa opakuje v ňom samom). Ide o “nepravidelný, fragmentovaný geometrický tvar, ktorý môže byť rozdelený na časti, z ktorých je každá aspoň približne podobná, zmenšená kópia celého geometrického tvaru”. Táto vlastnosť tiež býva nazývaná sebedopodobnosť. Príklady fraktálov v prírode sú oblaky, stromy alebo karfiol. Slovo “fraktál” pochádza z latinského slova “fractus”, ktoré v preklade znamená zlomené alebo roztrieštené. Slovo vymyslel Benoit B. Mandelbrot, ktorý sa považuje za otca fraktálnej geometrie a preslávil sa knihou *The Fractal Geometry of Nature* (1982).

Pri štúdiu fraktálov zohráva dôležitú úlohu ich rozmer (dimenzia). Dimenzia, tzv. topologická dimenzia známa z klasickej euklidovskej geometrie sa ukázala pri opise fraktálov ako nedostatočná. Felix Hausdorff preto zaviedol iný typ fraktálnej dimenzie, označovaný ako Hausdorffova dimenzia. Pre jednoduché objekty ju môžeme chápať ako číslo:

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}},$$

kde N je počet častí, z ktorých sa objekt skladá a ktoré vzniknú pomocou rovnolehlosti s koeficientom r z pôvodného objektu. Napríklad pre štvorec platí, že môže byť zložený zo štyroch menších štvorcov, ktoré z neho vzniknú pomocou rovnolehlosti s koeficientom $r = \frac{1}{2}$, i.e.,

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

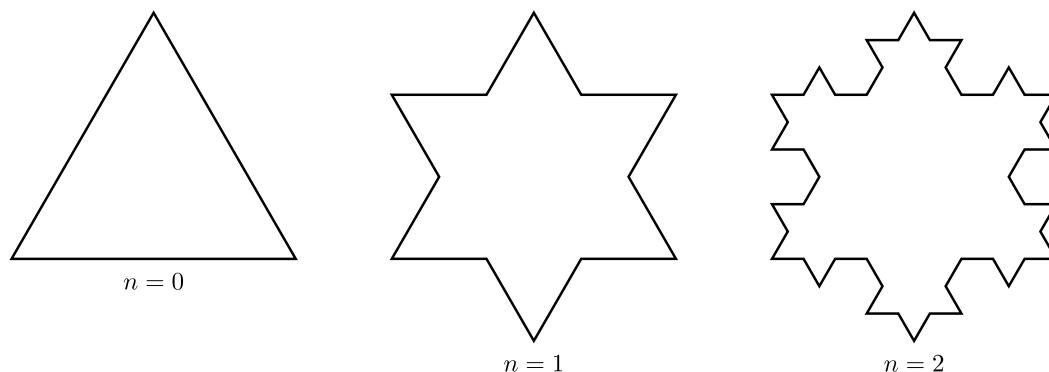
Pre štvorec je teda jeho fraktálna dimenzia (Hausdorffova dimenzia) rovnaká ako jeho normálna intuitívna dimenzia (topologická dimenzia).

Kochova vložka

Kochova vložka je krivka v rovine, ktorá vzniká iteračným procesom z rovnostranného trojuholníka. (iterácia: postup v matematike, pri ktorom sa opakovanne používa nejaká operácia/funkcia s cieľom postupne sa priblížiť ku konečnému výsledku)

Na začiatku je rovnostranný trojuholník so stranami dĺžky 1. V každom ďalšom kroku sa vykoná nasledovné:

1. Každá úsečka je rozdelená na tretiny.
2. Nad strednou tretinou úsečky sa vytvorí rovnostranný trojuholník.
3. Základňa trojuholníka (predchádzajúca prostredná tretina úsečky) sa odstráni.



Obr. 1: Prvá iterácia Kochovej vločky

Z obrázku vidíme, že na určenie dĺžky jednej strany snehovej vločky v prvej iterácii, potrebujeme 4 strany trojuholníka, ktorý vznikol zmenšením strany pôvodného trojuholníka v nultom kroku s koeficientom podobnosti $r = \frac{1}{3}$, i.e.,

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Keďže Kochova vločka je krivka, očakávali by sme, že jej dimenzia je 1. Táto nezrovnalosť je daný tým, že Kochova vločka je na koniec natoľko členitá, že výsledný fraktál má nekonečnú dĺžku, ale ohraničuje útvar konečného obsahu.

Úloha 1. vypočítajte obvod Kochovej snehovej vločky po prvej, druhej a tretej iterácii.

Riešenie. Na začiatku máme rovnostranný trojuholník s obvodom $o_0 = 3$. V prvej iterácii rozdelíme tri úsečky na tretiny, prostrednú tretinu z nich odoberieme a nahradíme ju dvoma úsečkami dĺžky $\frac{1}{3}$. Každá strana pôvodného trojuholníka sa predĺži o $\frac{1}{3}$, čím vznikne obvod po prvej iterácii

$$o_1 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

V druhej iterácii dostaneme na každej strane pôvodného trojuholníka štyri úsečky tretinovej dĺžky, ktoré rozdelíme na tretiny a predĺžime ich o $\frac{1}{9}$. To vedie k obvodu

$$o_2 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{3}.$$

Pri tretej iterácii budeme predlžovať na každej strane 16 úsečiek o $\frac{1}{27}$, a preto obvod po tretej iterácii bude

$$o_3 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{16}{27} = 3 + 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} = \frac{64}{9}.$$

Úloha 2. Aký je obvod Kochovej snehovej vločky po n -tej iterácii? Ukážte, že obvod Kochovej snehovej vločky je nekonečný.

Riešenie. Z uvedených výpočtov vyplýva, že každá úsečka je jedna tretina dĺžky úsečky z predchádzajúcej iterácie a zároveň je každá úsečka v nasledujúcej iterácii predĺži o jednu tretinu, t. j. úsečka sa predĺži na $\frac{4}{3}$ svojej predchádzajúcej dĺžky. Obvod Kochovej snehovej vločky po n -tej iterácii možno vyjadriť ako

súčet členov geometrickej postupnosti s kvocientom $\frac{4}{3}$ pre $n \in \mathbb{N}$:

$$o_n = 3 + \left(\frac{4}{3}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = 3 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1}.$$

Ak by sme takto pokračovali donekonečna, tak by sme v druhom člene súčtu dostali nekonečný geometrický rad. Keďže kvocient príslušnej geometrickej postupnosti je väčší ako jedna, je rad divergentný a obvod Kochovej snehovej vločky je nekonečný.

Úloha 3. Vypočítajte obsah Kochovej vločky po prvej a druhej iterácii.

Riešenie. Na začiatku si treba uvedomiť, že výška rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky a je $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ a obsah rovnostranného trojuholníka je

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Obsah rovnostranného trojuholníka z ktorého vychádzame je $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. V prvej iterácii rozdelíme tri úsečky na tretiny a na prostrednú tretinu umiestnime rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky $\frac{1}{3}$. Výsledný obsah po prvej iterácii je

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3}.$$

V druhom kroku budeme mať na každej strane pôvodného trojuholníka štvornásobný počet úsečiek, kam budeme umiestňovať trojuholník so stranou dĺžky $\frac{1}{9}$. Obsah sa po druhej iterácii zväčší na

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{40}{27}.$$

Úloha 4. Aký je obsah Kochovej snehovej vločky po n -tej iterácii? Koľkokrát je obsah Kochovej snehovej vločky väčší vzhľadom na pôvodný rovnostranný trojuholník?

Riešenie. Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že počet úsečiek do ktorých pridáme nový trojuholník, je štyrikrát väčší v každej iterácii. Zároveň strana nášho nového trojuholníka sa zmenší na tretinu svojej predchádzajúcej veľkosti, takže jeho obsah sa zmenší na jednu deväťtinu. Získame tak členy geometrickej postupnosti s kvocientom $\frac{4}{9}$ a obsah Kochovej snehovej vločky po n -tej iterácii je vytvorený obsahom pôvodného trojuholníka a súčtom prvých n členov tejto geometrickej postupnosti:

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \cdots + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} \right].$$

Keďže kvocient geometrickej postupnosti je menší ako jedna, pokračovaním do nekonečna dostaneme konvergentný geometrický rad. Pomocou vzorca pre jeho súčet dostaneme plochu Kochovej snehovej vločky po nekonečnom počte iterácií.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} \right) = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1,6 \cdot S_0.$$

Kochova snehová vločka má nekonečný obvod ohraničujúci konečnú plochu, ktorá je približne 1,6-krát väčšia ako obsah pôvodného rovnostranného trojuholníka.

Literatúra

- MathWorld. *Koch snowflake* [online]. Available from <https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html> [cit. 13. 7. 2023].
- *Kochova krivka* [online]. Dostupné z https://sk.wikipedia.org/wiki/Kochova_krivka [cit. 13. 7. 2023].