

Geometria fraktalna

Keywords: ciągi i szeregi, ciąg geometryczny, geometria fraktalna, płatek śniegu Kocha

Fraktal to obiekt, którego struktura geometryczna się powtarza. Charakterystyczną cechą fraktali jest ich samopodobieństwo. Przykłady fraktali w przyrodzie to chmury, drzewa lub główka kalafioru. Słowo “fraktal” pochodzi od łacińskiego słowa “fractus”, które oznacza złamany lub rozbity. Termin ten został stworzony przez Benoita B. Mandelbrota, uważany za ojca geometrii fraktalnej, znany ze swojej książki *The Fractal Geometry of Nature* (1982).

W badaniu fraktali ważną rolę odgrywa ich wymiar. Wymiar topologiczny, znany z klasycznej geometrii euklidesowej, okazał się niewystarczający do opisu fraktali. Dlatego potrzebny był inny rodzaj wymiaru. Został on wprowadzony przez Felixa Hausdorffa, znany jako wymiar Hausdorffa. Dla prostych obiektów możemy go rozumieć jako liczbę:

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}},$$

gdzie N to liczba części, z których składa się obiekt, utworzona przez samopodobieństwo ze współczynnikiem r z oryginalnego obiektu. Na przykład, dla kwadratu prawdą jest, że może on składać się z czterech mniejszych kwadratów, które powstają z niego przez samopodobieństwo ze współczynnikiem $r = \frac{1}{2}$, tj.,

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

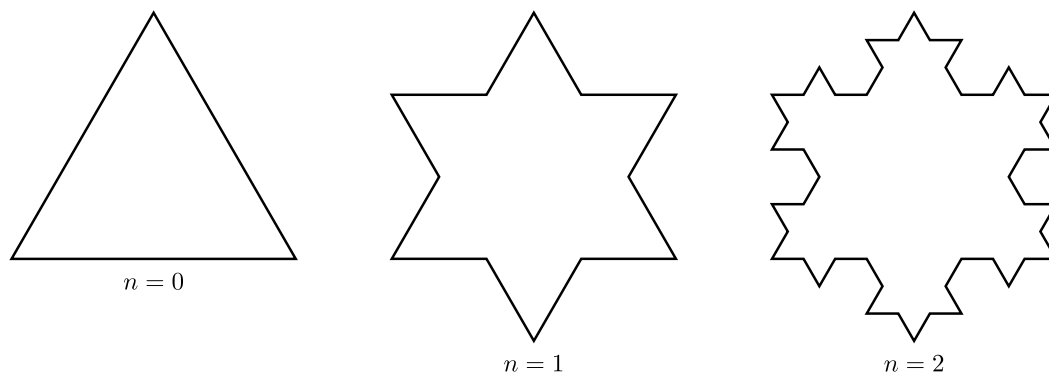
Zatem dla kwadratu jego wymiar fraktalny (wymiar Hausdorffa) jest równy jego normalnemu wymiarowi intuicyjnemu (wymiar topologiczny).

Płatek śniegu Kocha

Płatek śniegu Kocha jest krzywą na płaszczyźnie utworzoną w iteracyjnym procesie z trójkąta równobocznego.

Na początku dany jest trójkąt równoboczny o bokach długości 1. W każdym kolejnym kroku wykonywane są następujące czynności:

1. Każdy odcinek linii jest podzielony na trzy części.
2. Trójkąt równoboczny jest skonstruowany nad środkową trzecią częścią odcinka.
3. Podstawa skonstruowanego trójkąta (wcześniej środkowa jedna trzecia odcinka linii) jest usuwana.



Rysunek 1: Pierwsza iteracja płątka śniegu Kocha

Z rysunku widać, że aby wyznaczyć długość jednego boku płątka śniegu po pierwszej iteracji, potrzebujemy 4 boków trójkąta, który został utworzony przez zmniejszenie boku oryginalnego trójkąta od kroku zerowego ze współczynnikiem samopodobieństwa $r = \frac{1}{3}$, tj.

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Ponieważ płatek śniegu Kocha jest krzywą, jego wymiar powinien wynosić 1. Ta rozbieżność wynika z faktu, że płatek śniegu Kocha jest ostatecznie tak pofragmentowany, że wynikowy fraktal ma nieskończoną długość, ale ogranicza strukturę płaszczyzny o skończonej powierzchni.

Zadanie 1. Oblicz obwód płątka śniegu Kocha po pierwszej, drugiej i trzeciej iteracji.

Rozwiązanie. Początkowo mamy trójkąt równoboczny o obwodzie $o_0 = 3$. W pierwszej iteracji każdy z trzech odcinków segmentów jest podzielony na trzy części, a środkowa trzecia część jest zastąpiona przez dwa odcinki o długości $\frac{1}{3}$. Każdy bok oryginalnego trójkąta jest przedłużony o $\frac{1}{3}$, co daje obwód po pierwszej iteracji

$$o_1 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

W drugiej iteracji każdy bok oryginalnego trójkąta jest dzielony na cztery odcinki o długości jednej trzeciej pierwotnej długości, które są dalej dzielone na trzy części i przedłużone o $\frac{1}{9}$. Prowadzi to do obwodu

$$o_2 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{3}.$$

W trzeciej iteracji rozszerzamy 16 segmentów linii z każdej strony o $\frac{1}{27}$, co daje obwód

$$o_3 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{16}{27} = 3 + 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} = \frac{64}{9}.$$

Zadanie 2. Jaki jest obwód płątka śniegu Kocha po n -tej iteracji? Udowodnij, że obwód płątka śniegu Kocha jest nieskończony.

Rozwiązanie. Z powyższych obliczeń wynika, że każdy odcinek jest jedną trzecią długości odcinka z poprzedniej iteracji, a jednocześnie każdy odcinek iteracji jest w następnej iteracji wydłużany o jedną trzecią, tj. odcinek jest wydłużany do $\frac{4}{3}$ swojej poprzedniej długości. Obwód płątka śniegu Kocha po

n -tej iteracji można wyrazić za pomocą sumy szeregu geometrycznego ze wspólnym współczynnikiem $\frac{4}{3}$ for $n \in \mathbb{N}$:

$$o_n = 3 + \left(\frac{4}{3}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = 3 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1}.$$

Gdybyśmy kontynuowali w ten sposób w nieskończoność, otrzymalibyśmy nieskończony ciąg geometryczny w drugim członie powyższej sumy. Ponieważ stosunek odpowiedniego ciągu geometrycznego jest większy niż jeden, ciąg jest rozbieżny, a obwód płata śniegu Kocha jest nieskończony.

Zadanie 3. Oblicz pole powierzchni płata śniegu Kocha po pierwszej i drugiej iteracji.

Rozwiązanie. Na początku przyjmijmy, że wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a wynosi $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, a jego pole powierzchni wynosi

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Pole powierzchni początkowego trójkąta równobocznego wynosi $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. W pierwszej iteracji dzielimy odcinki na trzecie i umieszczamy mniejszy trójkąt równoboczny o boku długości $\frac{1}{3}$ w środkowej trzeciej części. Pole powierzchni po pierwszej iteracji wynosi

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3}.$$

W drugiej iteracji każdy bok oryginalnego trójkąta jest dzielony na cztery odcinki, a mniejszy trójkąt równoboczny o boku długości $\frac{1}{9}$ jest umieszczany na każdym odcinku. Pole powierzchni po drugiej iteracji wzrośnie do

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{40}{27}.$$

Zadanie 4. Jakie jest pole powierzchni płata śniegu Kocha po n -tej iteracji? Ile razy większe jest pole powierzchni płata śniegu Kocha w stosunku do oryginalnego trójkąta równobocznego?

Rozwiązanie. Z poprzednich rozważań wynika, że liczba odcinków, w których dodajemy nowy trójkąt, jest czterokrotnie większa w każdej iteracji. W tym samym czasie bok naszego nowego trójkąta zmniejsza się do jednej trzeciej jego poprzedniego rozmiaru, więc jego pole powierzchni zmniejsza się do jednej dziewiątej. Otrzymujemy wyrazy ciągu geometrycznego o współczynniku $\frac{4}{9}$, a pole powierzchni płata śniegu Kocha po n -tej iteracji jest tworzone przez pole pierwotnego trójkąta i sumę pierwszych n wyrazów tego ciągu geometrycznego:

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \cdots + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} \right].$$

Ponieważ stosunek ciągu geometrycznego jest mniejszy niż jeden, kontynuując do nieskończoności, otrzymujemy zbieżny ciąg geometryczny. Korzystając ze wzoru na jego sumę, otrzymujemy pole powierzchni płata śniegu Kocha po nieskończonej liczbie iteracji.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} \right) = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1,6 \cdot S_0.$$

Płatek śniegu Kocha ma nieskończony obwód otaczający skończone pole powierzchni, który jest około 1,6 razy większy niż pole powierzchni oryginalnego trójkąta równobocznego.

Literatura

- MathWorld. *Koch snowflake* [online]. Dostupny pod adrese <https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html> [cit. 13. 7. 2023].
- *Koch curve* [online]. Dostupny pod adrese https://cs.wikipedia.org/wiki/Kochova_k%C5%99ivka [cit. 13. 7. 2023].