

Fraktální geometrie

Keywords: posloupnosti a řady, geometrická posloupnost, fraktál, Kochova vložka

Fraktál je objekt, jehož geometrická struktura se opakuje v něm samém. Charakteristickou vlastností fraktálů je jejich soběpodobnost. Příkladem fraktálů v přírodě mohou být mraky, stromy nebo hlávka kvěťáku. Slovo fraktál pochází z latinského slova *fractus*, v překladu zlomený, rozbitý. Vymyslel ho Benoit B. Mandelbrot, považovaný za otce fraktální geometrie, kterou proslavil svou knihou *The Fractal Geometry of Nature* (1982).

Při zkoumání fraktálů hraje důležitou roli jejich dimenze. Dimenze, tzv. topologická dimenze, která je známá z klasické euklidovské geometrie, při popisu fraktálů nestačila, proto bylo potřeba zavést i jiný typ dimenze. Felix Hausdorff zavedl novou fraktální dimenzi, též označovanou Hausdorffova dimenze. Pro jednoduché objekty ji můžeme chápat jako číslo

$$d = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{r}},$$

kde N je počet částí z kterých se objekt skládá a které vzniknou pomocí stejnolehlosti s koeficientem r z původního objektu. Například pro čtverec platí, že jej můžeme složit ze čtyř menších čtverců, které z něj vzniknou pomocí stejnolehlosti s koeficientem $r = \frac{1}{2}$, tedy

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2.$$

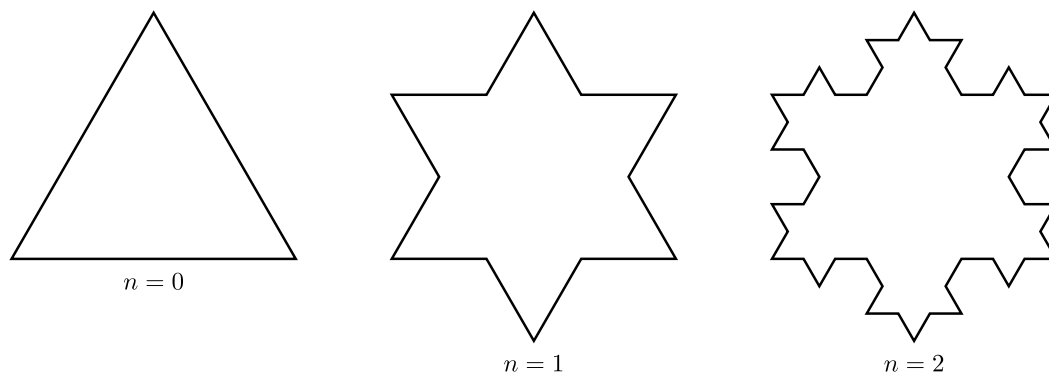
Pro čtverec je tedy jeho fraktální dimenze stejná jako normální intuitivní dimenze.

Kochova vložka

Kochova vložka je křivka v rovině, která vzniká iteračním procesem z rovnostranného trojúhelníku.

Na začátku je rovnostranný trojúhelník se stranami délky 1. V každém dalším kroku se pak provede následující:

1. Každá úsečka se rozdělí na třetiny.
2. Nad prostřední třetinou úsečky se sestrojí rovnostranný trojúhelník.
3. Základna trojúhelníka (dřívější prostřední třetina úsečky) se odstraní.



Obrázek 1: První iterace Kochovy vložky

Z obrázku můžeme vidět, že pro určení délky jedné strany vložky v první iteraci, potřebujeme 4 strany trojúhelníka, který vznikl zmenšením strany trojúhelníka v nultém kroku pomocí stejnohlosti s koeficientem $r = \frac{1}{3}$, tedy

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Jelikož Kochova vložka je křivka, očekávali bychom, že její dimenze je 1. Tento rozpor je dán tím, že Kochova vložka je na konci natolik členitá, že výsledný fraktál má nekonečnou délku, ale ohraničuje útvar konečného obsahu.

Úloha 1. Vypočítejte obvod Kochovy vložky po první, druhé a třetí iteraci.

Řešení. Na začátku máme rovnostranný trojúhelník s obvodem $o_0 = 3$. V první iteraci rozdělíme tři úsečky na třetiny, prostřední třetinu z nich odebereme a nahradíme ji dvěma úsečkami délky $\frac{1}{3}$. Každou stranu trojúhelníka jsme prodloužili o $\frac{1}{3}$ a výsledný obvod po první iteraci tak je

$$o_1 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

V druhé iteraci dostaneme na každé straně původního trojúhelníka čtyři úsečky třetinové délky, které rozdělíme na třetiny a prodloužíme je o $\frac{1}{9}$. Získáme tak obvod

$$o_2 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{3}.$$

Při třetí iteraci budeme prodloužovat na každé straně 16 úseček o $\frac{1}{27}$ a proto obvod po třetí iteraci bude

$$o_3 = 3 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{16}{27} = 3 + 1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9} = \frac{64}{9}.$$

Úloha 2. Jaký je obvod Kochovy vložky po n -té iteraci? Ukažte, že obvod Kochovy vložky bude nekonečný.

Řešení. Z výpočtů výše vidíme, že každý úsek má třetinovou délku oproti úseku v předchozím kroku a zároveň ho o jeden díl prodloužíme, tj. úsečka se prodlouží na $\frac{4}{3}$ původní délky. Obvod Kochovy vložky po n -té iteraci můžeme vyjádřit jako součet členů geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{4}{3}$ pro $n \in \mathbb{N}$:

$$o_n = 3 + \left(\frac{4}{3}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = 3 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{3}\right)^{i-1}.$$

Pokud bychom tímto způsobem pokračovali do nekonečna, tak bychom ve druhém členu součtu dostali nekonečnou geometrickou řadu. Vzhledem k tomu, že kvocient příslušné geometrické posloupnosti je větší než jedna, daná řada bude divergentní a obvod Kochovy vločky bude nekonečný.

Úloha 3. Vypočítejte obsah Kochovy vločky po první a druhé iteraci.

Řešení. Na začátku si uvědomme, že výška v rovnostranném trojúhelníku se stranou délky a je délky $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ a obsah rovnostranného trojúhelníka je

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Obsah výchozího rovnostranného trojúhelníku je $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. V první iteraci rozdělíme tři úsečky na třetiny a na prostřední třetinu umístíme rovnostranný trojúhelník se stranou délky $\frac{1}{3}$. Výsledný obsah po první iteraci tedy bude

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3}.$$

V druhém kroku budeme mít na každé straně původního trojúhelníku čtyřnásobný počet úseček, kam budeme umisťovat trojúhelník se stranou délky $\frac{1}{9}$. Obsah po druhé iteraci se zvětší na

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{40}{27}.$$

Úloha 4. Jaký je obsah Kochovy vločky po n -té iteraci? Kolikrát větší obsah má Kochova vločka vzhledem k původnímu rovnostrannému trojúhelníku?

Řešení. Z předchozích úvah plyne, že počet úseček, kam přidáváme nový trojúhelník, je v každé iteraci čtyřnásobně větší. Zároveň se nám strana nového trojúhelníku zmenšuje na třetinu předchozí velikosti, proto se jeho obsah zmenšuje na devítinu. Získáváme tak členy geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{4}{9}$ a obsah Kochovy vločky po n -té iteraci je tvořen obsahem původního trojúhelníka a součtem prvních n členů dané geometrické posloupnosti:

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \cdots + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} \right].$$

Jelikož kvocient geometrické posloupnosti je menší než jedna, tak pokračováním do nekonečna dostaneme konvergentní geometrickou řadu. Použitím vzorečku pro její součet dostaneme obsah Kochovy vločky po nekonečném počtu kroků

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} \right) = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1,6 \cdot S_0.$$

Kochova vločka má nekonečný obvod omezující konečnou plochu, která má obsah přibližně 1,6-krát větší než obsah původního rovnostranného trojúhelníku.

Literatura

- MathWorld. *Koch snowflake* [online]. Dostupné z <https://mathworld.wolfram.com/KochSnowflake.html> [cit. 13. 7. 2023].
- Kochova křivka [online]. Dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Kochova_křivka [cit. 13. 7. 2023].